


FONDO PIZZOFALCONE


NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
135
999
VITTORIO EM. III
NAPOLI





DISSERTATION

SUR

LA BALISTIQUE.

Paris. — Impr. de H. Vrayet de Surcy et Comp., rue de Sèvres, 37.

DISSERTATION

SUR

LA QUESTION DE BALISTIQUE

PROPOSÉE

PAR L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE PRUSSE

Pour le Prix de 1782

LEQUEL LUI A ÉTÉ ADJUGÉ DANS L'ASSEMBLÉE PUBLIQUE DU 6 JUIN

PAR LE GENDRE

Ancien Professeur de Mathématiques à l'École Royale Militaire de Paris, et, depuis, Membre de l'Académie des Sciences de France, etc., etc.

(AVEC PLANCHE.)





PARIS

J. CORRÉARD, ÉDITEUR D'OUVRAGES MILITAIRES,
Rue de l'Est, n° 9.

1846



RECHERCHES

SUR

LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS.



. . . . . Tolluntur in altum
Ut lapsu graviore ruant. . . . .

1. Newton est le premier qui ait fait des recherches sur les trajectoires dans les milieux résistants; il assigne particulièrement celle qui a lieu dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la simple vitesse; mais il ne donne que des approximations assez grossières pour la trajectoire qui a lieu lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. S'il n'a pas donné la vraie construction de cette courbe, c'est sans doute parce qu'il l'a jugée trop compliquée pour que la pratique en pût tirer quelque avantage; car il n'est pas à présumer que ce petit problème d'analyse eût arrêté l'inventeur des nouveaux calculs. Quoi qu'il en soit, l'honneur de la découverte est due à Jean Bernouilli, qui en a publié une solution générale, en supposant la résistance comme une puissance quelconque de la vitesse.

Longtemps après, M. Euler a repris la même question dans les Mémoires de l'académie de Berlin pour l'année 1753; son but est d'appliquer la théorie à la balistique, et il propose pour cela des moyens fort ingénieux.

Dans les Mémoires de la même académie pour l'année 1765 et ailleurs on trouve des recherches fort étendues de M. Lambert, sur le même objet. M. le chevalier de Borda, dans les Mémoires de l'académie des sciences de Paris pour l'année 1769, a traité cette question avec son élégance et sa finesse ordinaires; d'après l'idée de Newton, il substitue à la vraie trajectoire celle qui serait décrite en vertu d'une densité très-peu variable, et il obtient par ce moyen une approximation fort supérieure à celle de Newton. Enfin M. Bezout, dans son Cours d'artillerie qui a paru en 1772, a fait une application plus particulière des méthodes qui lui sont propres au jet des bombes et des boulets.

Tels sont les principaux auteurs qui ont écrit sur cette matière. Heureux si, en profitant de leurs découvertes, j'avais pu remplir les vues de l'académie.

ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE.

2. J'appelle l'angle de projection PAV (*fig.* 2). . . θ

La vitesse de projection. V

La hauteur due à cette vitesse. . . . . . . h

La gravité ou la vitesse qu'elle imprime dans une seconde. . . . . g

La vitesse à un point quelconque M. . . . . . u

La hauteur due à cette vitesse. . . . . . . z

L'angle que fait en M la direction du mobile avec l'horizon. . . . . φ

L'élément du temps. . . . . dt

Puis à l'ordinaire. $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$.

La résistance du milieu étant supposée proportionnelle au carré de la vitesse, je la représenterai par $\frac{u^2}{2k}$ ou $\frac{z}{k}g$. La quantité k désignera la hauteur due à la vitesse avec laquelle le mobile éprouve une résistance égale à son poids. Si le milieu est d'une densité uniforme, k sera constant; mais si la densité est variable, $\frac{1}{k}$ sera variable aussi et proportionnel à la densité.

3. Cela posé, la force retardatrice en M sera $\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dx}{ds}$ suivant PA, et $\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dy}{ds} + g$ suivant MP. On observera que dans cette dernière force, au lieu de g, il faudrait mettre $\left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)g$, si la densité δ' du fluide était comparable à la densité δ du corps. Mais dans le jet des bombes et des boulets, on peut en toute sûreté négliger $\frac{\delta'}{\delta}$. On aura donc, suivant les principes de la mécanique,

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dx}{ds}\, dt$$

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dy}{ds}\, dt - g dt.$$

Faisant $dy = pdx$, et supposant dx constante, ces équations deviendront

$$dxdp = -\, gdt^2$$

$$kddp = dpds.$$

La seconde est l'équation de la trajectoire, l'autre donnera la vitesse et le temps du mouvement.

4. Nous supposerons que la densité $\frac{1}{k}$ est constante, et dans cette hypothèse l'équation $kddp = dpds$ aura pour intégrale $\frac{dp}{dx} = \mathrm{A}e^{\frac{s}{k}}$.

Pour déterminer la constante A, on prendra l'équation $dpdx = -gdt^2$, qui donne $\frac{dp}{dx} = -\frac{gdt^2}{dx^2}$; et comme au point de projection la vitesse horizontale $\frac{dx}{dt} = \mathrm{V}\cos.\theta$, on aura $\mathrm{A} = -\frac{g}{\mathrm{V}^2\cos.^2\theta} = -\frac{1}{2h\cos.^2\theta}$, donc

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{s}{k}}}{2h\cos.^2\theta}.$$

On aura en même temps la hauteur due à la vitesse en M.

$$z = \frac{h\cos.^2\theta}{\cos.^2\varphi}e^{-\frac{s}{k}}.$$

5. L'équation différentielle qu'on vient de trouver étant multipliée par ds et intégrée donnera

$$e^{\frac{s}{k}} = 1 + \frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + \mathrm{L}\,\mathrm{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right)$$
$$-\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left[p\sqrt{1+pp} + \mathrm{L}(p + \sqrt{1+pp})\right],$$

d'où résultera en éliminant $e^{\frac{s}{k}}$ et séparant,

$$\frac{dx}{2h} = \frac{-dp}{\frac{h\cos.^2\theta}{k} + \frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + \mathrm{L}\,\mathrm{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) - p\sqrt{(1+pp)} - \mathrm{L}(p + \sqrt{(1+pp)})}.$$

On en conclurait aussi la valeur de pdx ou de dy. Mais malheureusement les formules ne sont pas intégrables, et ne se prêtent pas même aux approximations, si ce n'est dans un très-petit nombre de cas.

6. Si le milieu ne résiste pas, ou du moins si la vitesse de projection est assez petite pour que $\frac{h}{k}$ soit considérée comme nulle, on aura

$$dx = -2h \cos.^2 \theta \,.\, dp.$$

Donc $$p = \text{tang.}\ \theta - \frac{x}{2h \cos.^2 \theta},$$

et $$y = x \text{ tang.}\ \theta - \frac{xx}{4h \cos.^2 \theta}.$$

Equation à la parabole, d'où l'on déduit la hauteur du jet $= h \sin.^2 \theta$, et son amplitude $= 4h \sin.\ \theta \cos.\ \theta$.

7. Si la résistance du milieu, sans être absolument nulle, est assez petite, eu égard à la vitesse de projection, pour qu'on puisse rejeter les puissances de $\frac{h}{k}$ supérieures à la première, on aura assez exactement,

$$-\frac{dx}{2h \cos.^2 \theta} = dp - \frac{h \cos.^2 \theta}{k} dp \left(\frac{\sin.\ \theta}{\cos.^2 \theta} + \text{L tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta) \right) + \frac{h \cos.^2 \theta}{k} dp \left(p \sqrt{1+pp} + \text{L} (p + \sqrt{1+pp})\right),$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x}{2h \cos.^2 \theta} = \text{tang.}\ \theta - p - \frac{h \cos.^2 \theta}{k} \left(\frac{\sin.\ \theta}{\cos.^2 \theta} + \text{L tang.} \right.$$

$$(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\Big)(t.\theta - p) - \frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{1+pp}\right.$$

$$\left. + p\,\mathrm{L}(p + \sqrt{1+pp})\right) + \frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{1}{3\cos.^3\theta} - \frac{1}{\cos.\theta}\right.$$

$$\left. + \operatorname{tang}.\theta\,\mathrm{L}\operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Traitant de même la valeur de dy ou de pdx, on trouvera

$$\frac{y}{2h\cos.^2\theta} = \frac{t.^2\theta - p^2}{2}$$

$$-\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + \mathrm{L}\operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right)\left(\frac{t^2\theta - p^2}{2}\right)$$

$$-\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{2p^3 - p}{8}\sqrt{1+pp} + \frac{4pp+1}{8}\mathrm{L}(p + \sqrt{1+pp})\right)$$

$$+\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{2\operatorname{tang}.^3\theta - \operatorname{tang}.\theta}{8\cos.\theta} + \frac{4\operatorname{tang}.^2\theta + 1}{8}\mathrm{L}\operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Si on fait $p = o$, on aura la hauteur du jet,

$$h\sin.^2\theta - \frac{h^2\cos.^4\theta}{4k}\left(\frac{2\operatorname{tang}.^3\theta + \operatorname{tang}.\theta}{\cos.\theta} - \mathrm{L}\operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Si on fait $y = o$ pour avoir l'angle de chute, on trouvera sa tangente p

$$= -\operatorname{tang}.\theta - \frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{2t.^2\theta - 1}{8\cos.\theta} + \frac{4t.^2\theta + 1}{8\operatorname{tang}.\theta}\mathrm{L}\operatorname{tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de x, on aura l'amplitude du jet

$$4h\sin.\theta\cos.\theta - \frac{2h^2\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{14\operatorname{tang}.^2\theta + 1}{8\cos.\theta} + \frac{12\operatorname{tang}.^2\theta - 1}{8\operatorname{tang}.\theta}\mathrm{L}\,t.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

On pourrait, avec un peu de patience, pousser le calcul jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{h^2}{k^2}$, et les formules qui en résulteraient pourraient s'appliquer dans différents cas du jet des bombes où $\frac{h}{k}$ est sensiblement au-dessous de l'unité.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DE

LA TRAJECTOIRE.

8. Soit ASB (*fig.* 1[re]) la vraie trajectoire du mobile, AS′B′ celle qu'il aurait décrite dans le vide avec la même vitesse et le même angle de projection. Soient pris dans ces trajectoires deux points N et N′ où les tangentes soient parallèles, la formule trouvée (5) donnera

$$e^{\frac{\mathrm{AN}}{k}} = 1 + \frac{\mathrm{AN}'}{k},$$

ou

$$\frac{\mathrm{AN}}{k} = \mathrm{L}\left(1 + \frac{\mathrm{AN}'}{k}\right),$$

propriété qui établit une correspondance remarquable entre ces deux trajectoires.

9. Si on veut savoir ce que devient la courbe ASB prolongée du côté de A au-dessous de l'horizontale AB (*fig.* 2), on fera AN et AN′ négatifs dans l'équation précédente, ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{AN}}{k} = -\mathrm{L}\left(1 - \frac{\mathrm{AN}'}{k}\right).$$

D'où il suit qu'en prenant sur la parabole l'arc $\mathrm{AN}' = k$

et menant la tangente N′V′, la trajectoire BAN aura une asymptote XZ parallèle à N′V′.

10. — Si on prend l'arc parabolique An' de plus en plus grand, l'arc correspondant An de la trajectoire augmentera aussi, mais beaucoup moins rapidement. Donc An' étant infini, An le sera aussi. Mais l'infini logarithmique étant du dernier ordre, on voit que la courbe Bn ne tardera pas à se confondre avec une ligne verticale, et qu'elle doit avoir par conséquent une asymptote verticale.

11. — C'est ce dont on achèvera de se convaincre en considérant le mouvement d'un corps lancé suivant la direction Av (*fig.* 4), qui fait avec l'horizontale un angle θ' déjà fort près de 90°. Dans ce cas nous appellerons PM, y, et tang. AMQ ou $\frac{dy}{dx} = p$; p sera une quantité fort grande et qui augmente jusqu'à l'infini.

Nous aurons alors

$$dp\sqrt{1+pp} = \frac{e^{\frac{s'}{k}}\,ds'}{2h'\cos.^2\theta'};$$

mais comme on peut mettre sans erreur sensible p au lieu de $\sqrt{1+pp}$, on aura en intégrant $pp - \text{tang.}^2\,\theta' = \frac{k}{h'\cos.^2\theta'}(e^{\frac{s'}{k}}\ 1)$.

Eliminant $e^{\frac{s'}{k}}$, on a

$$\frac{dx}{2k} = \frac{dp}{pp + \frac{k - h'\sin.^2\theta'}{h'\cos.^2\theta'}}.$$

Or il est aisé de démontrer que $\frac{k - h'\sin.^2\theta}{h'\cos.^2\theta'}$ est une

quantité positive; je l'appelle m^2, et j'ai en intégrant $\frac{mx}{2k}=\text{arc tang.}\,\frac{p}{m}-\text{arc tang.}\,\frac{\text{tang.}\,\theta}{m}$, d'où résulte x égale à une quantité finie lorsque p est infini. Donc la courbe AM a une asymptote verticale DY. Il en est de même de la courbe Bn (*fig.* 2), puisque, à une distance assez petite de B, l'angle de la courbe avec l'horizontale est déjà fort près de 90°.

12. — Quant à la proposition avancée, que $k-h'\sin.^2\theta'$ est une quantité positive, on pourrait se dispenser de la démontrer, puisque cette quantité étant supposée négative, l'équation $\frac{dx}{2k}=\frac{dp}{pp-mm}$ indiquerait toujours une asymptote verticale. Cependant si on en voulait la démonstration, on appellerait $-\theta'$ la valeur de φ et h' celle de z au point N (*fig.* 1); on aurait (4), $h'\cos.^2\theta'=h\cos.^2\theta\, e^{-\frac{s}{k}}$;

donc $k-h'\sin.^2\theta'=ke^{-\frac{s}{k}}\left(e^{\frac{s}{k}}-\frac{h\cos.^2\theta}{k}\cdot\frac{\sin.^2\theta'}{\cos.^2\theta'}\right)$;

et comme
$$e^{\frac{s}{k}}=1+\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta}+\text{L tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right)+\frac{h\cos.^2\theta}{k}\left(\frac{\sin.'\theta}{\cos.^2\theta'}+\text{L tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta')\right),$$

il est clair que $e^{\frac{s}{k}}-\frac{h\cos.^2\theta}{k}\cdot\frac{\sin.^2\theta'}{\cos.^2\theta'}$ est nécessairement positif.

13. — Puisque notre trajectoire a deux asymptotes, l'une verticale, l'autre qui fait avec l'horizon un angle plus grand que θ, elle ressemble assez à une hyperbole dont une asymptote serait verticale (*fig.* 5). Newton cherche dans ses *Principes*

quelle doit être la densité du milieu pour que l'hyperbole soit la vraie trajectoire du mobile. Ce problème est facile à résoudre par l'équation $kddp = dpds$, dans laquelle $\frac{1}{k}$ peut représenter la densité, car l'équation de l'hyperbole étant de cette forme,

$$y = \frac{ax - x^2}{b - x} \cdot \frac{b}{a} \text{ tang. } \theta,$$

on en déduira facilement

$$\frac{ddp}{dpds} \text{ ou } \frac{1}{k} = \frac{3}{\sqrt{bb - ab}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{\text{tang. } \theta}}}{\sqrt{1 + pp}}.$$

14. — Si cette quantité pouvait être regardée comme suffisamment constante dans toute l'étendue de la courbe, on aurait une approximation fort simple pour les trajectoires dans les milieux résistants. C'était là le but de Newton; mais si on examine la densité, on trouvera qu'elle varie entre A et S, depuis $\frac{3}{b}$ cos. θ jusqu'à $\frac{3}{\sqrt{bb - ab}}$. Elle augmente encore au delà de S, mais jusqu'à un certain point seulement; enfin au point de chute B elle devient $\frac{3}{\sqrt{(b-a)^2 + b^2 \text{ tang.}^2 \theta}}$. Il est bien difficile, comme on voit, de concilier ces valeurs avec l'hypothèse d'une densité constante, à moins que l'angle de projection ne soit fort petit. Cependant on verra par la suite que la branche descendante de cette hyperbole peut être employée dans bien des cas pour représenter à très-peu près la vraie trajectoire.

15. — Si on supposait la vitesse et la densité au point de projection dans cette trajectoire hyperbolique, comme elles sont dans la vraie trajectoire, il faudrait prendre $\frac{ab}{b-a} = 4h$ sin. θ cos. θ et $b = 3k$ cos. θ, et l'amplitude du jet serait

$$a = \frac{4h \sin.\theta \cos.\theta}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{h}{k}\sin.\theta}\delta,$$

amplitude évidemment trop petite, puisque la résistance n'est vraie qu'au point de projection, et qu'elle est trop petite dans tous les autres points. Mais cette valeur sera d'autant plus près de la vérité, que k sera plus grand et θ plus petit. Cette formule serait très-commode pour calculer les portées du but en blanc des pièces de canon.

16. — Pour revenir aux propriétés générales, on observera (*fig.* 1re) que la branche descendante BS diffère d'autant plus de la branche ascendante AS que h est plus grand par rapport à k. La branche ascendante est presque droite dans une étendue assez considérable, surtout lorsque la vitesse de projection est fort grande; au contraire la branche descendante est sensiblement courbe dans toute son étendue. Quant à la vitesse du projectile, elle va continuellement en diminuant jusqu'à un certain point N dans la branche descendante; elle augmente ensuite, mais d'une manière peu rapide, puisqu'à l'infini la hauteur due à la vitesse est k. C'est ce que nous développerons dans l'exemple que nous allons calculer.

PREMIÈRE MÉTHODE D'APPROXIMATION.

17. — Nous prendrons k pour l'unité, et nous suppose-

rons qu'on connaît l'angle de projection θ, ainsi que la hauteur h due à la vitesse de projection. Soit, par exemple,

$$h = 10 \text{ et } \theta = 45^\circ,$$

l'équation de la trajectoire (5) deviendra

$$e^s = 12,477936 - 5\,\delta\left(\frac{\sin.\varphi}{\cos.^2\varphi} + \mathrm{L\,tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\right).$$

Je donne à φ différentes valeurs de cinq en cinq degrés, 40, 35, 30, etc. Il en résulte autant de valeurs de s dont les différences premières, que je nomme δs, sont les petits arcs parcourus pendant que la direction du corps varie de 5°. Ces différences servent à trouver celles de l'abscisse et de l'ordonnée, en considérant que l'élément δs peut être regardé comme une petite ligne droite inclinée à l'horizon d'une quantité moyenne entre les inclinaisons de ses deux extrémités. Par exemple, si l'élément δs est parcouru entre les degrés d'inclinaison 30 et 35, j'en conclus

$$\delta y = \delta s \sin.\ 32^\circ \tfrac{1}{2}$$

et

$$\delta x = \delta s \cos.\ 32^\circ \tfrac{1}{2}.$$

On verra ci-dessous quel est le degré d'approximation qu'on peut obtenir par cette voie.

18. — Pour faciliter le calcul, on voit qu'il est nécessaire d'avoir une table des valeurs de $\frac{\sin.\varphi}{\cos.^2\varphi} + \mathrm{L\,tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, au moins de cinq en cinq degrés. En voici une qui n'est pas complète, mais qui suffit pour notre objet.

φ	$\frac{\sin. \varphi}{\cos.^2 \varphi} + \text{L tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$.
0°	0, 000 000
5	0, 175 200
10	0, 354 473
13	0, 465 806
15	0, 542 244
20	0, 743 708
25	0, 965 389
30	1, 215 973
35	1, 507 632
40	1, 858 276
43	2, 107 894
44	2, 199 368
45	2, 295 587
50	2, 864 724
55	3, 644 135
60	4, 781 059
65	6, 580 790
70	9, 768 500
74	14, 614 441
75	16, 447 126

19. — Si l'on procède maintenant au calcul que nous venons d'indiquer et qu'on ajoute les δy depuis $\varphi = 45°$ jusqu'à $\varphi = 0$, on aura la hauteur du jet. Faisant ensuite φ négatif, et observant qu'alors $\frac{\sin. \varphi}{\cos.^2 \varphi} + \text{L tang.} (45° + \frac{1}{2} \varphi)$ ne fait que changer de signe et conserve la même valeur, on

poussera le calcul jusqu'à ce que la somme des δy négatifs égale à peu près la hauteur du jet. De cette manière on trouvera les résultats compris dans la table suivante. Nous avons pris les premières valeurs de φ plus proches les unes des autres, afin d'obtenir une plus grande approximation.

φ	s	δs	INCLINAISON MOYENNE.	δy	δx
45°	0,000 000				
44	0,392 782	0,392 782	44 ½	0,275 305	0,280 152
43	0,661 897	0,269 115	43 ½	0,185 247	0,195 209
40	1,158 940	0,497 043	41 ½	0,329 851	0,372 263
35	1,597 320	0,438 380	37 ½	0,266 869	0,347 792
30	1,855 997	0,258 677	32 ½	0,138 988	0,218 167
25	2,034 837	0,178 840	27 ½	0,082 579	0,158 633
20	2,170 127	0,135 290	22 ½	0,051 773	0,124 992
15	2,878 980	0,108 853	17 ½	0,032 733	0,103 815
10	2,370 764	0,091 784	12 ½	0,019 866	0,089 608
5	2,451 172	0,080 408	7 ½	0,010 495	0,079 720
0	2,523 962	0,072 790	2 ½	0,003 175	0,072 721
Somme des δy et des δx dans la branche ascendante.				1,396 381	2,043 072
— 5	2,591 811	0,067 849	— 2 ½	0,002 960	0,067 784
— 10	2,656 778	0,064 967	— 7 ½	0,008 480	0,064 411
— 15	2,720 582	0,063 804	— 12 ½	0,013 810	0,062 291
— 20	2,784 563	0,063 981	— 17 ½	0,019 239	0.061 020
— 25	2,850 989	0,066 426	— 22 ½	0,025 420	0,061 370
— 30	2,920 890	0,069 901	— 27 ½	0,032 277	0,062 003
— 35	2.996 537	0,075 647	— 32 ½	0,040 645	0,063 800
— 40	3,080 501	0,083 964	— 37 ½	0,051 114	0,066 614
— 45	3,176 213	0,095 712	— 42 ½	0,064 662	0,070 566
— 50	3,288 460	0,112 247	— 47 ½	0,082 757	0,075 833
— 55	3.424 217	0,135 757	— 52 ½	0,107 703	0,082 644
— 60	3,594 108	0,169 891	— 57 ½	0,143 285	0,091 282
— 65	3,815 113	0,221 005	— 62 ½	0,196 034	0,102 049
— 70	4,116 113	0,301 000	— 67 ½	0,278 088	0,115 188
— 75	4,550 857	0,434 744	— 72 ½	0,414 623	0,130 730

20. — Cette table donne d'abord la hauteur du jet SD = 1,396381, et l'amplitude de la branche ascendante

AD = 2,043072. En ajoutant les δy négatifs jusqu'à ce que leur somme égale la hauteur du jet, on trouve que cette somme est trop petite à 70° et trop grande à 75°. On aurait le vrai point de chute par les parties proportionnelles; mais, pour plus d'exactitude, je calcule directement l'arc s lorsque $\varphi = -74°$, je trouve $s = 4,449103$ et dans l'intervalle de 70 à 74°, j'ai

$$\delta s = 0,332990,$$
$$\delta y = -0,316692,$$
$$\delta x = 0,102900.$$

D'où je conclus :

L'angle de chute,	74° 8′
L'amplitude de la branche descendante,	1,153510
L'amplitude totale AB,	3,196582

On trouve en même temps la longueur de la trajectoire ASB = 4,462834.

DEGRÉ DE PRÉCISION DE CETTE MÉTHODE.

21. — La méthode précédente ne peut être d'aucun usage dans la pratique, à cause de la longueur des calculs qu'elle exige; mais elle a l'avantage d'être directe et de donner tout de suite une grande approximation. Nous pourrons donc juger du degré de précision des autres méthodes, quand nous aurons fixé celui dont elle est susceptible.

Soit un arc de cercle AB divisé en un nombre n de parties égales que j'appelle ω; soit AF = A et le rayon FC = 1, nous aurons, suivant notre méthode, cette approximation :

$$AH=\omega\left(\sin.(A+\tfrac{1}{2}\omega)+\sin.(A+\tfrac{3}{2}\omega)+\text{------}+\sin.(A+\frac{2n-1}{2}\omega)\right)$$

$$BH=\omega\left(\cos.(A+\tfrac{1}{2}\omega)+\cos.(A+\tfrac{3}{2}\omega)+\text{------}+\cos.(A+\frac{2n-1}{2}\omega)\right)$$

et par la sommation de ces suites on trouve:

$$AH=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin.\frac{1}{2}\omega}\left(\cos.A-\cos.(A+n\omega)\right)$$

$$BH=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin.\frac{1}{2}\omega}\left(\sin.(A+n\omega)-\sin.A\right);$$

d'où il suit que l'abcisse et l'ordonnée sont augmentées constamment dans le rapport de sin. $\frac{1}{2}\omega$ à $\frac{1}{2}\omega$ ou qu'elles sont trop grandes l'une et l'autre de $\frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^2}{4}$ (*), ω étant un petit arc. Cette augmentation est de $\frac{1}{3150}$ lorsque l'arc ω est de 5°.

22. — Une courbe quelconque pouvant être regardée comme composée de très-petits arcs de cercle, on voit qu'une semblable augmentation aura lieu dans toutes les courbes divisées en parties assez petites pour que leur courbure soit

---

(*) Ici et dans la suite de ce Mémoire, j'estime les erreurs en comparant la différence des deux quantités avec celle des deux qui est vraie ou qu'on regarde comme telle. Ainsi, le vrai résultat étant a et celui qui en approche b, l'erreur sera $\frac{a-b}{a}$.

uniforme. On peut même prévoir ce qui arrivera dans celles dont la courbure, sans être uniforme, suivra une loi connue. Ainsi, dans notre trajectoire, la partie la plus voisine du point A étant la moins courbe dans la branche ascendante, l'inclinaison moyenne est trop petite. Les δy sont donc trop petits et les δx trop grands. D'où il suit que la hauteur du jet 1,396381, qui est trop grande d'environ $\frac{1}{3150}$ par la nature de la méthode, est trop petite par une autre raison qui paraît prépondérante. Ces inégalités sont difficiles à évaluer; cependant, par un examen plus réfléchi, nous avons cru devoir porter la hauteur du jet jusqu'à 1,3975.

23. — Quant à l'amplitude 2,043072 de la branche ascendante, comme elle est trop grande par deux raisons, nous pouvons la diminuer de $\frac{1}{3150}$, et le reste 2,042423 sera encore un peu trop grand.

24. — Dans la branche descendante il y a deux parties à considérer : l'une depuis le sommet jusqu'au point de la plus grande courbure qui répond à 13°40′ d'inclinaison $\left(\text{on le trouve par l'équation } e^{s} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{h \cos.^2 \theta}{\sin.\varphi \cos.^2\varphi}\right)$, l'autre depuis ce point jusqu'au point de chute. Dans la première partie l'inclinaison moyenne étant supposée trop grande, les δy sont trop grands et les δx trop petits. Au contraire dans le reste de la courbe les δy sont trop petits et les δx trop grands. De tout cela il résulte que, en fixant la hauteur du jet de 1,3975, on peut diminuer l'amplitude trouvée de $\frac{1}{3150}$ dans toute son étendue, et l'établir de 3,195567; encore est-il probable qu'elle sera un peu trop grande. Cependant plusieurs causes tendent à la diminuer :

1° Parce que la correction $\frac{1}{3150}$ est trop forte pour le commencement de la courbe;

2° Parce qu'il y a une diminution insensible des δx depuis le sommet jusqu'au point de la plus grande courbure;

3° Enfin parce que les δy étant moins diminués dans la branche descendante que dans la branche ascendante, l'amplitude de celle-là, étant supposée répondre à la même hauteur, doit être un peu trop petite.

DEGRÉS DE VITESSE DU PROJECTILE.

25. — Nous avons trouvé ci-dessus la hauteur due à la vitesse du projectile $z = \frac{h \cos.^2 \varphi}{\cos.^2 \theta} e^{-s}$. J'appelle h' ce qu'elle devient au sommet de la trajectoire; j'aurai

$$h' = \frac{h \cos.^2 \theta}{1 + h \cos.^2 \theta \left(\frac{\sin. \theta}{\cos.^2 \theta} + \text{L tang.} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta\right)\right)}.$$

Substituant les valeurs numériques, on trouve dans notre exemple $h' = 0{,}400707$.

26. — La vitesse du projectile est la plus petite un peu au delà du sommet au point où l'on a $e^s = -\frac{h \cos.^2 \theta}{\sin. \varphi \cos.^2 \varphi}$, et la hauteur due à cette vitesse $= -\sin. \varphi$. Dans notre exemple le point de la plus petite vitesse est situé vers 20° d'inclinaison, et la hauteur due à cette vitesse $= \sin. 20^\circ = 0{,}35$. Le point de la plus petite vitesse est toujours plus loin du sommet que le point de la plus grande courbure.

27. — Depuis le point de la plus petite vitesse jusqu'à

l'infini, la vitesse du corps augmente, mais d'une manière peu rapide, puisqu'à l'infini la hauteur due à cette vitesse$=1$, quels que soient la vitesse et l'angle de projection. Dans notre exemple le point de chute répond à environ 74° d'inclinaison. Faisant donc $\varphi = -74°$, on trouve $\xi = 0,7705$. Donc la vitesse de projection est à la vitesse au point de chute :: 18 : 5 à peu près.

28. — On peut concevoir ainsi le changement de vitesse dans la branche descendante. Lorsqu'un projectile est chassé horizontalement, comme on l'imagine du sommet de sa trajectoire, sa vitesse commence par diminuer. Car dans les premiers instants, la gravité, quelle qu'elle soit par rapport à la résistance du milieu, ne peut ajouter suffisamment à la vitesse du corps, puisqu'elle n'agit pas dans sa direction. Si la hauteur due à la vitesse horizontale du corps est plus grande que l'unité, au bout d'un certain temps elle sera réduite à l'unité, et alors la résistance sera égale à la gravité. Mais, comme il n'y a qu'une partie de la gravité qui accélère le mouvement du corps, il est clair que la vitesse doit encore diminuer. Cependant cette diminution doit avoir des limites; car la gravité devenant de plus en plus efficace à mesure que le corps s'approche de son asymptote verticale, et la résistance diminuant avec la vitesse, il y aura un point où ces deux forces se feront équilibre. Ce point, qui sera celui de la plus petite vitesse, se déterminera donc par l'équation :

$$g \sin. \varphi = - gz,$$

ou $$e^{\prime} = - \frac{{}^{\prime}h \cos.^2 \theta}{\sin. \varphi \cos.^2 \varphi}, \text{ comme ci-dessus.}$$

Passé ce point de la plus petite vitesse où z sera $- \sin. \varphi$, et

par conséquent plus petit que l'unité, l'action de la pesanteur, devenant de plus en plus directe, l'emportera sur la résistance et augmentera la vitesse jusqu'à ce que la hauteur qui lui est due $=1$. Mais ce n'est qu'à l'infini qu'on obtiendra cette limite. Quelle que soit donc la hauteur due à la vitesse au sommet, elle diminuera jusqu'à un certain point où elle sera plus petite que l'unité, puis elle augmentera jusqu'à l'extrémité infinie de la trajectoire où elle sera égale à l'unité.

29. — Je conclurai de là que dans l'hypothèse d'un air uniformément dense on ne procurerait pas une vitesse de chute fort considérable aux bombes, en les élevant même beaucoup plus haut qu'on ne peut le faire par le moyen de la poudre. Car nous venons de voir que leur vitesse en tombant serait due à une hauteur moindre que l'unité, et par conséquent serait fort au-dessous de la vitesse initiale. Un très-petit angle de projection donnerait alors la vitesse au point de chute beaucoup plus grande.

SECONDE MÉTHODE D'APPROXIMATION.

30. — L'équation $kddp=dpds$ n'étant point intégrale lorsque k est constant, nous prendrons pour k une quantité variable qui rende l'intégration possible et qui soit telle pourtant que la densité $\frac{1}{k}$ n'ait pas d'anomalies trop considérables. La formule qui nous a paru propre à remplir cet objet est

$$\frac{1}{k}=\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La densité sera donc 1 au sommet; pour qu'elle soit la même au point de projection, il faut qu'on ait

$$\frac{1+\alpha \text{ tang.}^2 \theta}{\sqrt{1+\text{tang.}^2 \theta}}=1.$$

Ainsi on prendra

$$\alpha=\frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}.$$

31. — D'après cette valeur on voit déjà trois points dans la trajectoire où la densité $=1$; le point de projection, le sommet et le point de la branche descendante où l'inclinaison est θ comme au point de projection. Reste à savoir si dans les autres points la densité ne varie pas d'une manière trop sensible. Or, en cherchant le minimum de la formule

$$\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}},$$

on trouve qu'il a lieu lorsque

$$p^2=\frac{1-2\alpha}{\alpha}=\frac{1-\cos.\theta}{\cos.\theta},$$

et alors la densité $=\sqrt{1-\text{tang.}^4 \frac{1}{2}\theta}$, quantité un peu plus petite que l'unité, mais de manière que la différence est imperceptible à moins que l'angle de projection ne soit fort grand; lorsque $\theta=30^\circ$ cette quantité $=1-\frac{1}{400}$, lorsque

$\theta = 45^\circ$ elle est $1 - \frac{1}{67}$. Enfin en supposant l'angle de projection même de 60°, le minimum de la densité $= \frac{17}{18}$. D'où l'on peut espérer une approximation suffisante.

32. — Pour nous arrêter à l'angle de projection de 45°, on voit que la densité supposée sera vraie au sommet et à 45° d'inclinaison de part et d'autre du sommet. Dans les points intermédiaires la densité sera trop petite, mais sa plus grande diminution n'ira qu'à $\frac{1}{67}$. De là résulte une légère augmentation dans la portée depuis le point de projection jusqu'au point de la branche descendante où l'inclinaison est de 45°. Depuis ce dernier point jusqu'au point de chute la densité augmente d'une manière assez rapide, puisqu'au point de chute où l'inclinaison est d'environ 74°, la densité est $1 \frac{1}{3}$. Mais il faut considérer : 1° que ce n'est qu'à l'extrémité de la trajectoire que l'augmentation de densité est si sensible; 2° que la portion de la branche descendante où la densité est trop grande ne répond qu'à une portion assez petite de l'amplitude : c'est environ $\frac{1}{6}$ dans cet exemple; 3° que l'effet de cette augmentation est de raccourcir la portée qui était trop grande dans le reste de la courbe; d'où résulte une espèce de compensation qui, en rectifiant les portées, les laissera encore un peu trop grandes.

33. — Après nous être assurés du degré d'exactitude avec lequel notre formule représente la densité, procédons à l'intégration de l'équation

$$kddp' = dpds.$$

Elle devient dans cette hypothèse

$$ddp = (1 + \alpha p^2)\, dx dp;$$

on en tire d'abord

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{3}\alpha p^3 + p - \mathrm{B};$$

et comme au point de projection

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h\cos.^2\theta},$$

on a la constante

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2h\cos.^2\theta} + \text{tang.}\,\theta + \frac{\alpha}{3}\text{tang.}^3\,\theta.$$

Maintenant la séparation des variables donne

$$\frac{\alpha}{3}dx = \frac{-dp}{\frac{3\mathrm{B}}{\alpha} - \frac{3}{\alpha}p - p^3}.$$

Soit déterminé c par l'équation cubique

$$\frac{\alpha}{3}c^3 + c - \mathrm{B} = 0,$$

et on aura

$$\frac{\alpha}{3}\,dx = \frac{-dp}{(c-p)(p^2+cp+c^2+\frac{3}{\alpha})}.$$

Faisant donc pour abréger

$$\sqrt{\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{\alpha}} = m,$$

on aura l'intégrale

$$(1+c^2\alpha)\,x = \mathrm{L}\left(\frac{c-p}{c-\text{tang.}\,\theta}\right) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(\frac{(p+\frac{1}{2}c)^2+m^2}{(\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c)^2+m^2}\right)$$

$$-\frac{\frac{3}{2}c}{m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{p+\frac{1}{2}c}{m}\right)+\frac{\frac{3}{2}c}{m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m}\right).$$

Pour avoir y, on multipliera la valeur de dx par $c-p$, et on aura en intégrant

$$y-cx = \frac{3}{\alpha m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{p+\frac{1}{2}c}{m}\right)-\frac{3}{\alpha m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m}\right).$$

34. — Pour faciliter le calcul numérique de ces formules, on cherchera deux angles A et P tels que

$$\text{tang.}\,\mathrm{A} = \frac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m},\ \text{tang.}\,\mathrm{P} = \frac{p+\frac{1}{2}c}{m},$$

en observant que dans la branche descendante où p est négatif, tang. P peut être négatif aussi. Alors l'angle P sera négatif et non obtus, car la diminution de l'angle P se faisant successivement jusqu'au point où $p=-\frac{1}{2}c$, lorsque p devient plus grand, P augmente aussi par degrés.

Ces angles étant trouvés, on aura

$$x(1+c^2\alpha)=\mathrm{L}\left(\frac{c-p}{c-\text{tang.}\,\theta}\right)+\mathrm{L}\left(\frac{\cos.\,\mathrm{P}}{\cos.\,\mathrm{A}}\right)+\frac{3c}{2m}(\mathrm{A}-\mathrm{P}).$$

$$y=cx-\frac{3}{\alpha m}(\mathrm{A}-\mathrm{P}).$$

35. — La première de ces formules peut être encore simplifiée en prenant un nouvel angle ψ, tel que

$$\text{tang.}\,\psi=\frac{\frac{3}{2}c}{m};$$

alors elle devient

$$(1+c^2\alpha)\,x=\mathrm{L}\left(\frac{\sin.\,(\psi-\mathrm{P})}{\sin.\,(\psi-\mathrm{A})}\right)+\frac{\frac{3}{2}c}{m}(\mathrm{A}-\mathrm{P});$$

mais la première sera moins sujette à erreur lorsque c différera fort peu de tang. θ.

36. — On observera, 1° que c doit être calculé avec précision par l'équation

$$\frac{\alpha}{3}c^3+c-\mathrm{B}=0,$$

surtout lorsqu'il différera fort peu de tang. θ. Or ce calcul est fort aisé à faire par les fausses positions et par la table des logarithmes; 2° que les logarithmes de nos formules étant toujours hyperboliques, si on se sert des logarithmes ordinaires, il faudra multiplier ceux-ci par le nombre 2,3025851, dont le logarithme est 0,3622157; 3° que A—P désignant la longueur absolue d'un arc dont le rayon est 1, après avoir évalué cet arc en degrés et parties décimales de degré, il faudra les multiplier par le nombre $\frac{\pi}{180}$, dont le logarithme est 8,2418774.

EXEMPLE 1.

37. — On propose de calculer la hauteur du jet et l'amplitude de la branche ascendante, lorsque $h=10$ et $\theta=45°$.

Il faudra faire $p=0$ et procéder au calcul comme il suit :

$$\alpha=\frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}=\sqrt{2}-1=0{,}4142136,\ L\alpha=L\ \text{tang.}\ 22°\tfrac{1}{2}=9{,}6172243.$$

$$B=\frac{1}{2h\cos.^2\theta}+\text{tang.}\,\theta+\frac{\alpha}{3}\,\text{tang.}^3\,\theta=1{,}2380712.$$

Pour trouver c on résoudra l'équation

$$\frac{\alpha}{3}c^3+c-B=0,$$

par les fausses positions, ce qui donnera très-promptement

$$c=1,0692727,\ Lc=0,0290885.$$

D'où l'on conclura :

$$\frac{3}{4}c^2=0,8575082$$

$$\frac{3}{\alpha}=3(\sqrt{2}+1)=7,2426407$$

$$\text{Somme } m^2=8,1001489$$

$$L'm=0,4542465$$

Je cherche maintenant les angles A et P.

$$L\tfrac{1}{2}c=9,7280585$$

$$L\,m=0,4542465$$

$$\text{Reste L tang. P}=9,2738120$$

$$L(1+\tfrac{1}{2}c)=0,1860055$$

$$L\,m=0,4542465$$

$$\text{L tang. A}=9,7317590$$

$P=10°\ 38'\ 20'',56$ L cos. P $=9,9924695$

$A=28\ \ 20\ \ \ 2\ ,58$ L cos. A $=9,9445792$

$$L\frac{\cos. P}{\cos. A}=0,0478903$$

$$L\frac{c}{c-1}=1,1885264$$

Somme. 1,2364167

Multipliant cette somme par	2,3025851
Le produit sera	2,8469547

On a ensuite $A-P=17°41'42''=17°,695$.

D'où l'on conclura

$$\frac{\frac{3}{2}c}{m}(A-P)=0,1740449.$$

Donc $$(1+c^2\alpha)x=3,0209996.$$

Mais $$1+c^2\alpha=1,4735887\,;$$

donc $$Lx=0,3117744 \text{ et } x=2,050097.$$

C'est l'amplitude de la branche ascendante. Pour avoir y qui est la hauteur du jet, on prendra l'équation

$$y=cx-\frac{3}{\alpha m}(A-P),$$

d'où l'on conclut presque sans calcul

$$y=1,406192.$$

Or nous avons trouvé par la première méthode

$$x=2,042423,\ y=1,3975.$$

La différence est de $\frac{1}{270}$ sur l'amplitude, et de $\frac{1}{160}$ sur la hauteur du jet.

38. — On devait bien s'attendre à trouver par cette méthode x et y un peu trop grands, puisque la densité est un peu moindre que dans la vraie trajectoire. Au reste si l'amplitude est plus exacte à proportion de la hauteur du jet, c'est que la densité est vraie dans une étendue sensible au sommet; or les erreurs en cette partie n'influeraient que sur l'amplitude.

EXEMPLE 2.

39. — Dans la même hypothèse on demande l'amplitude totale.

Il faut donc chercher une valeur négative de p qui étant substituée dans nos formules donne $y=0$; c'est à quoi l'on ne peut parvenir que par une espèce de tâtonnement. Mais comme on sait que l'angle de chute est sensiblement au-dessus de l'angle de projection, on pourra essayer au hasard une valeur de p qu'on jugera convenable, et pour peu que la valeur de y qui en résultera soit petite, on en conclura facilement une amplitude plus approchée. Car si après avoir supposé $p=-\text{tang.}\ \theta'$, il en résulte $x=a$ et $y=\pm\delta$, on aura l'amplitude plus exacte $x=a\pm\delta\ \text{cot.}\ \theta'$.

40. — Dans le cas présent nous savons que l'angle de chute est fort près de 74°. Prenant donc

$$p=-\text{tang. } 74^\circ,$$

on trouvera

$$x=3{,}176101$$

et

$$y=+0{,}092179.$$

Ce résultat indique qu'à 74° d'inclinaison le mobile est encore au-dessus de l'horizontale AB; mais en multipliant y par cot. 74°, et ajoutant le produit à x, on a l'amplitude corrigée.

$$x = 3,202531.$$

Par cette correction l'amplitude se trouve un peu trop grande; mais la différence est imperceptible.

41. — Nous avons trouvé par la première méthode (24) l'amplitude$=$3,195567; le résultat précédent n'en diffère que de $\frac{1}{450}$. C'est donc à juste titre que nous avons annoncé cette seconde méthode comme devant donner une approximation suffisante. Quant au calcul qu'elle exige, il est un peu long; mais on peut employer beaucoup moins de décimales que nous ne l'avons fait. Trois ou quatre suffisent, excepté peut-être pour le terme c—tang. θ, ou son correspondant sin. $(\psi - A)$, qui demande une plus grande précision.

CALCUL SÉPARÉ POUR LA BRANCHE DESCENDANTE.

42. — Les formules que nous venons de trouver donnent la vitesse trop grande au sommet, parce que la densité est trop petite. De là il résulte une erreur particulière sur la branche descendante, erreur qu'on peut éviter en calculant séparément cette branche.

La hauteur h' due à la vitesse au sommet se détermine exactement par la formule

$$h' = \frac{h \cos.^2 \theta'}{1 + h \cos.^2 \theta \left(\frac{\sin. \theta}{\cos.^2 \theta} + \mathrm{L} \operatorname{tang.} (45° + \frac{1}{2} \theta)\right)}.$$

Nous pouvons imaginer le corps lancé horizontalement avec une telle vitesse, et les formules du n° 33 s'appliqueront ici en faisant le θ de ces formules $=0$.

Si nous changeons en même temps les signes de p et de y, afin que ces quantités soient positives dans la branche descendante, les formules auxiliaires seront :

$$\frac{\alpha}{3}c^3+c-\frac{1}{2h'}=0,$$

$$\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{\alpha}=m^2,$$

$$\text{tang.}\ \psi=\frac{\frac{3}{2}c}{m},$$

$$\text{tang.}\ \text{A}=\frac{\frac{1}{2}c}{m},$$

$$\text{tang.}\ \text{P}=\frac{p-\frac{1}{2}c}{m},$$

et nous aurons

$$(1+c^2\alpha)x=\text{L}\left(\frac{\sin.(\psi+\text{P})}{\sin.(\psi-\text{A})}\right)+\frac{\frac{3}{2}c}{m}(\text{A}+\text{P}),$$

$$y=-cx+\frac{3}{\alpha m}(\text{A}+\text{P}).$$

43. — Quant aux valeurs des constantes, nous observerons qu'on peut toujours faire $\alpha=\frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}$, mais θ de-

vient arbitraire. Si on le prend de 45° dans notre exemple, la densité sera vraie au sommet et à 45° d'inclinaison. Dans l'intervalle de ces deux points elle est trop petite; mais le *minimum* qui répond à 32° 46′ d'inclinaison est encore de $\frac{66}{67}$. Passé 45° jusqu'au point de chute, la densité est trop grande. On pourrait prendre θ plus grand que 45°, et même de 74°, afin que la densité, qui est toujours exacte au sommet, le fût encore au point de chute. Mais dans l'intervalle de ces deux points elle serait sensiblement trop petite, son *minimum* étant 0,8231. Il vaut donc mieux s'en tenir à l'angle de 45° dans notre exemple, afin que la première partie de la courbe depuis 0° jusqu'à 45° d'inclinaison soit déjà fort près de la vraie trajectoire, et que la seconde partie, où il n'est pas nécessaire que la densité soit si exacte, serve à corriger l'erreur de la première. Le calcul suivant prouve qu'en prenant θ plus grand que 45° l'amplitude serait plus approchée; mais il est difficile de fixer au juste la valeur de θ qui produirait une exacte compensation dans les erreurs.

EXEMPLE 1.

44. — Supposant pour la branche descendante de notre trajectoire

$$\alpha = \frac{\cos. 45^\circ}{1 + \cos. 45^\circ} = \sqrt{2} - 1,$$

comme pour la branche ascendante, et calculant h' comme il vient d'être dit, on aura

$$\frac{1}{2h'} = 1{,}2477936,$$

ce qui diffère un peu de 1,238, etc., valeur de B dans la branche ascendante. La valeur de c et celle de m seront donc un peu différentes ; on trouvera :

$$c = 1,0758574,$$

$$Lm = 0,4545303.$$

Maintenant si l'on suppose

$$p = \text{tang. } 74°,$$

on trouvera

$$x = 1,1212377,$$

$$y = 1,310352.$$

Mais la hauteur du jet a été trouvée 1,406192; corrigeant donc l'amplitude de la branche descendante, on aura

$$x = 1,148719,$$

et de là l'amplitude totale 3,198816, qui ne diffère plus que de $\frac{1}{1000}$ de celle qui a été trouvée par la première méthode.

EXEMPLE 2.

45. — Si l'on veut faire en sorte que la densité soit vraie au point de chute, il faudra prendre

$$\alpha = \frac{\cos. 74°}{1 + \cos. 74°},$$

et on trouvera l'amplitude de la branche descendante

$$x=1,175246,$$

quantité trop grande puisque la densité est trop petite. Cependant l'erreur n'est pas fort considérable; elle n'est guère que de $\frac{1}{50}$. Ce qui prouve qu'en changeant un peu la valeur de α l'amplitude n'en est pas sensiblement altérée.

46. — Remarquons que dans le calcul de la branche descendante on pourrait s'épargner la résolution de l'équation cubique

$$\frac{\alpha}{3}c^3+c-\frac{1}{2h'}=0.$$

Car, après avoir vu quelle est à peu près la valeur qu'il convient de donner à α, qu'on calcule aussi grossièrement la valeur de c. C'est à c qu'on donnera une valeur en nombres ronds, et on en déduira la valeur de α par l'équation

$$\frac{\alpha}{3}c^3=\frac{1}{2h'}-c.$$

Car nous venons de voir qu'il nous est permis d'altérer un peu la valeur de α; or nous l'altérons de manière que c se trouve exactement, ce qui ne peut manquer de simplifier le calcul.

TROISIÈME MÉTHODE D'APPROXIMATION.

47. — Il paraît difficile de trouver des formules qui, sans être trop compliquées, représentent la trajectoire en entier avec plus d'exactitude que celles de la méthode précédente.

Mais si on veut calculer séparément la branche ascendante et la branche descendante, on pourra y parvenir par des formules plus simples et à peu près aussi exactes.

CALCUL DE LA BRANCHE ASCENDANTE.

48. — Nous avons vu ci-dessus (13) que la densité nécessaire pour décrire l'hyperbole était

$$\frac{\sqrt{1-\alpha p}}{\sqrt{1+pp}}.$$

Cette formule, qui réussit assez bien pour la branche descendante, nous a donné l'idée de supposer pour la branche ascendante

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+pp}}.$$

Il en résulte l'équation facilement intégrable

$$\frac{ddp}{dx}=\frac{dp}{\sqrt{1-\alpha p}}.$$

Mais, avant d'aller plus loin, il est nécessaire de déterminer α et de voir quel degré de précision on doit attendre de cette nouvelle méthode.

49. — La densité au point de projection devant être la même qu'au sommet, on fera

$$1=(1-\alpha \text{ tang. } \theta)(1+\text{tang.}^2 \theta),$$

ce qui donnera

$$\alpha = \sin.\theta \cos.\theta;$$

α étant connu, si on cherche le minimum de la formule

$$(1-\alpha p)(1+pp),$$

on trouvera qu'il a lieu lorsque

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1-3\sin.^2\theta\cos.^2\theta}}{3\sin.\theta\cos.\theta}.$$

Lorsque $\theta = 45^\circ$, cette formule donne

$$p = 1, \text{ et } p = \tfrac{1}{3}.$$

La première valeur $p=1$ indique qu'au point de projection la densité est à son minimum; elle reste donc la même dans une étendue sensible, ce qui procurera une grande approximation, surtout pour la hauteur du jet. L'autre valeur $p = \frac{1}{3}$ donne le maximum de la densité $1\frac{1}{25}$.

Si θ est plus petit que 45°, il n'y a qu'une valeur de p qui sera utile, savoir

$$p = \frac{1 - \sqrt{1-3\sin.^2\theta\cos.^2\theta}}{3\sin.\theta\cos.\theta};$$

elle indiquera un maximum. Lorsque

$$\theta = 30^\circ, \text{ ce maximum} = 1\,\frac{1}{38},$$

et ainsi de moins en moins à mesure que l'angle de projection est plus petit.

Enfin lorsque θ est plus grand que 45°, par exemple lorsque $\theta = 60^\circ$, les deux valeurs de p peuvent servir, savoir

$$p = \frac{4+\sqrt{7}}{3\sqrt{3}},\ p = \frac{4-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}.$$

La première fait voir que vers 52° d'inclinaison la densité est trop petite de $\frac{1}{13}$, et qu'à 14° $\frac{1}{2}$ elle est trop grande de $\frac{1}{38}$. Entre ces deux points il y en a un où la densité est juste; c'est lorsque

$$p = \cot.\,\theta, \text{ ou lorsque l'inclinaison est de } 30^\circ.$$

50. — De là il résulte que jusqu'à 45° et un peu au delà les portées seront trop petites, ainsi que les hauteurs des jets; mais l'angle de projection devenant plus grand, ces quantités seront un peu trop grandes. On obtiendrait un degré d'approximation de plus en faisant coïncider la densité au point de projection avec la densité à une petite distance du sommet; il faudrait alors prendre pour $\frac{1}{k}$ la formule

$$\frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+pp}}.$$

51. — Si on intègre maintenant l'équation

$$\frac{ddp}{dx}=\frac{dp}{\sqrt{1-\alpha p}},$$

on aura

$$\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{dp}{dx}=\mathrm{C}-\sqrt{1-\alpha p},$$

et par la valeur initiale de $\frac{dp}{dx}$ on trouve

$$\mathrm{C}=\cos.\theta-\frac{\text{tang.}\,\theta}{4\,h}.$$

Soit maintenant

$$\sqrt{1-\alpha p}=z,$$

on aura

$$dx=\frac{zdz}{z-c},$$

et en intégrant

$$x=z-\cos.\theta+\mathrm{CL}\left(\frac{z-\mathrm{C}}{\cos.\theta-\mathrm{C}}\right).$$

On trouve de même

$$(1-\mathrm{C}^2)\,x-\alpha y=\tfrac{1}{3}(z^3-\cos.^3\theta)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}(z^2-\cos.^2\theta).$$

J'appelle X l'amplitude de la branche ascendante, et Y la hauteur du jet ; j'aurai ces formules :

$$X = 1 - \cos.\theta + CL\left(\frac{1-C}{\cos.\theta - C}\right)$$

$$Y = \frac{1-C^2}{\alpha}X - \frac{C}{2}\text{tang.}\,\theta - \frac{1}{3\alpha}(1-\cos.^3\theta).$$

EXEMPLE.

52. — Nous supposerons toujours

$$h = 10^o \text{ et } \theta = 45^o,$$

donc

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \text{ et } C = 0{,}6821068;$$

d'où l'on tire

$$X = 2{,}027381$$

$$Y = 1{,}396186.$$

On sera sans doute étonné de voir avec quelle précision cette méthode nous donne la hauteur du jet que nous avions trouvée d'abord de 1,396381, et qui doit être tout au plus de 1,3975. C'est que la densité est exacte dans une étendue sensible au commencement de la courbe, ou dans la partie qui influe le plus sur la hauteur. Quant à l'amplitude X, on

voit qu'elle est un peu trop petite, puisque nous l'avons trouvée ci-dessus de 2,042423. Mais la différence n'est guère que de $\frac{1}{140}$. On peut se rendre raison de cette différence en considérant que notre formule suppose la résistance vers le sommet un peu trop grande; or ce surcroît de résistance influe tout entier sur la valeur de X.

53. — Par ce seul exemple on voit que cette méthode est susceptible du même degré de précision que l'autre, et que les calculs en sont beaucoup moins compliqués. Passons donc au calcul de la branche descendante ; elle offrira plus de difficulté, parce que l'angle φ y varie davantage.

CALCUL DE LA BRANCHE DESCENDANTE.

54. — J'observe d'abord que la seconde méthode, quelque compliquée qu'elle soit, a un avantage réel dans le calcul de la branche descendante ; c'est qu'on peut supposer la densité vraie au sommet et au point de chute, sans qu'elle soit fort loin de la vérité dans les points intermédiaires. Mais comme il s'agit principalement de simplifier les calculs, quand même on perdrait quelque chose du côté de l'exactitude, nous prendrons une formule plus simple pour représenter la densité.

55. — Nous supposerons, avec M. le chevalier de Borda,

$$\frac{1}{k}=\frac{1+\alpha p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Cette formule $=1$ au sommet; pour qu'elle soit encore 1 au

point de la branche descendante où l'inclinaison est ξ, il faut prendre

$$\alpha = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\xi.$$

Dans tout l'intervalle de $p=0$ jusqu'à $p=\xi$, la densité sera trop grande, et son maximum sera

$$\frac{1}{\cos.\ \frac{1}{2}\xi}\ \text{lorsque}\ p = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\xi.$$

M. le chevalier de Borda prend ξ égal à l'angle de chute; mais il est clair qu'alors la densité est sensiblement trop grande dans toute la trajectoire, surtout lorsque l'angle de chute est un peu grand. Ainsi dans notre exemple, où l'angle de chute est d'environ 74°, le maximum de la densité serait

$$\frac{1}{\cos.\ 37^\circ}\ \text{ou}\ 1\frac{1}{4},$$

ce qui rendrait l'amplitude sensiblement trop petite. Il vaut donc mieux prendre ξ beaucoup plus petit que l'angle de chute, il en résultera deux avantages :

1° Que la densité variera beaucoup moins depuis $p=0$ jusqu'à $p=\text{tang.}\ \xi$;

2° Que, la densité étant trop petite depuis $p=\text{tang.}\ \xi$ jusqu'au point de chute, cette partie de la trajectoire pourra servir à corriger la première.

On ne peut pas dire au juste quelle doit être la valeur de ξ pour que les erreurs des deux parties de la courbe se compensent parfaitement; mais le calcul nous a fait voir qu'il

fallait prendre ξ un peu moindre que l'angle de projection θ. Ainsi, dans notre exemple, ξ doit être un peu moindre que 45°, ce qui est fort loin, comme on voit, de 74°.

56. — La quantité α étant donc prise d'nne manière convenable suivant les différents cas, on aura

$$\frac{ddp}{dx}=(1+\alpha p)\,dp,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dp}{dx}=\frac{(1+\alpha p)^2-C^2}{2\alpha}.$$

Si nous appelons toujours h' la hauteur due à la vitesse au sommet, nous aurons $C^2=1-\frac{\alpha}{h'}$. Faisant ensuite

$$1+\alpha p=z,$$

et intégrant, on trouve

$$Cx=L\left(\frac{z-C}{z+C}\right)+L\left(\frac{1+C}{1-C}\right)$$

$$x(1-C)+\alpha y=2\,L\left(\frac{z+C}{1+C}\right).$$

57. — Pour faciliter le calcul de ces formules, on verra d'abord quelle valeur il convient de donner à α; on fera

grossièrement $\frac{\alpha}{h'} = \sin.^2\lambda$, d'où résulte $C = \cos.\ \lambda$. Connaissant ainsi à peu près la valeur de C, on prendra pour C les deux ou trois premières figures de cos. λ; on en conclura aussitôt $\alpha = h'(1-C)(1+C)$. De cette manière C aura toujours une valeur exacte et commode; on donnera à z ou $1+\alpha p$ la valeur qui convient à peu près à l'angle de chute. La première équation donnera la valeur de x, et la seconde celle de y. Si celle-ci cadre avec la hauteur du jet connue par la branche ascendante, x fera l'amplitude de la branche descendante; sinon, l'erreur et l'angle de chute ou une nouvelle supposition serviront à trouver la vraie amplitude.

58. — On peut éliminer z des deux équations précédentes, et l'équation de la trajectoire devient

$$x + \alpha y = -2\,\mathrm{L}\left(\frac{1+C}{2C} e^{\frac{-Cx}{2}} - \left(\frac{1-C}{2C}\right) e^{\frac{Cx}{2}}\right).$$

Mais en faisant

$$\frac{1-C}{2C} = \beta,$$

la forme suivante paraît plus commode pour le calcul :

$$Cx + \frac{\alpha y}{2\beta} = -\frac{1}{\beta}\,\mathrm{L}\left(1+\beta-\beta e^{Cx}\right).$$

On connaîtra dans cette équation $\frac{\alpha y}{2\beta}$ et β, et on pourra regarder Cx comme l'inconnue.

59. — Ces formules doivent être mises sous une autre forme

si $\frac{\alpha}{h'}$ n'est pas plus petit que l'unité. D'abord si $\frac{\alpha}{h'}=1$, ce qu'on pourra supposer dans bien des cas, puisque α n'est déterminé qu'à peu près, l'équation devient

$$x+h'y=-2\mathrm{L}\,(1-\tfrac{1}{2}x),$$

et la solution en sera extrêmement facile.

60. — Si α est plus grand que h', on fera $\frac{\alpha}{h'}=1+b^2$, ou plutôt faisant grossièrement $\frac{h'}{\alpha}=\cos.^2\psi$, ce qui donnerait $b=\text{tang.}\,\psi$, on prendra pour b les deux ou trois premiers chiffres de cette tangente, d'où l'on déduit réciproquement $\alpha=h'(1+b^2)$.

Cela posé, l'équation de la trajectoire deviendra, en éliminant encore z,

$$x+\alpha y=-2\mathrm{L}\left(\cos.\frac{bx}{2}-\frac{1}{b}\sin.\frac{bx}{2}\right).$$

En prenant exactement tang. $\mathrm{M}=b$, le second membre de cette équation se réduirait à

$$-2\mathrm{L}\left(\frac{\sin.\mathrm{M}-\frac{1}{2}bx}{\sin.\mathrm{M}}\right).$$

EXEMPLE.

61. — Soit proposé de calculer l'amplitude de la branche descendante, en supposant la hauteur du jet $y=1{,}396186$

et la vitesse au sommet due à la hauteur $h'=0,4007072$.

On pourra supposer comme ci-dessus (44) la densité exacte à 45° d'inclinaison, ce qui donnera de même $\alpha=\sqrt{2}-1$ et $Lb=9,2638539$.

Je conserve ces valeurs pour mieux comparer la méthode actuelle avec celle de l'article cité, autrement je prendrais $b=0,184$, puis $\alpha=h'(1+bb)$.

D'après ces valeurs je trouve l'amplitude de la branche descendante

$$x=1,147025,$$

ce qui cadre fort bien avec le résultat de l'article cité qui est 1,148719, l'un et l'autre différant fort peu de la vraie amplitude 1,15314. Ces résultats se rapprocheraient encore davantage s'ils étaient calculés sur une même valeur de y.

62. — La valeur que nous avons donnée à α suppose que la densité est juste à 45°. A 22° $\frac{1}{2}$ elle est trop grande de $\frac{1}{12}$, et depuis 45° jusqu'au point de chute elle est trop petite. Cette seconde partie de la courbe ne suffit pas pour compenser l'erreur de la première, puisque l'amplitude est encore trop petite. D'où il suit que notre résultat eût été plus exact en prenant α un peu plus petit que tang. (22° $\frac{1}{2}$). C'est ce que nous avons avancé (55).

63. — Si dans cet exemple on eût pris $\alpha=$tang. 37°, afin que la densité fût exacte au point de chute, on aurait trouvé l'amplitude de la branche descendante $x=1,10577$, qui diffère de $\frac{1}{24}$ de la vraie amplitude. On conçoit qu'il doit y avoir dans ce cas une erreur sensible, puisque du sommet au point de chute la densité est constamment trop

grande, son maximum étant $\frac{5}{4}$. Il faut donc nécessairement prendre α plus petit que M. le chevalier de Borda ne l'indique.

DE QUELQUES CAS OU L'ON PEUT SIMPLIFIER LE CALCUL DE LA BRANCHE DESCENDANTE.

64. — Dans la trajectoire hyperbolique dont nous avons parlé ci-dessus considérons particulièrement la branche descendante SMB (*fig.* 6). Après avoir mené par le sommet S l'horizontale SO, faisons

$$SP=x,\ PM=y,$$

l'angle des deux asymptotes$=\xi$,

la distance $SO=b$,

l'équation de l'hyperbole sera

$$y \text{ tang. } \xi=\frac{xx}{b-x}.$$

Nous avons déjà vu que cette courbe serait la vraie trajectoire, en supposant la densité du milieu$=\frac{3}{b}\cdot\frac{\sqrt{1+p \text{ tang. } \xi}}{\sqrt{1+pp}}$.

Or il peut se faire que cette quantité ne varie pas beaucoup dans une certaine étendue de la branche SMB.

65. L'équation précédente étant différentiée donne

$$1+p \text{ tang. } \zeta = \left(\frac{b}{b-x}\right)^2.$$

Mais comme on doit avoir au sommet

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2h'} \text{ et la densité } = 1;$$

donc

$$b = 3 \text{ et tang. } \zeta = \frac{4h'}{3}.$$

D'où l'on voit que les quantités b et ζ sont absolument déterminées; et que l'hyperbole ne représentera assez bien la trajectoire que lorsque la densité $\frac{\sqrt{1+p \text{ tang. } \zeta}}{\sqrt{1+pp}}$ sera peu variable.

66. La densité est vraie lorsque l'inclinaison est ζ, ou lorsque $p = \text{tang. } \zeta$.

Depuis le sommet jusqu'à ce point la densité est trop grande, et son *maximum*, lorsque $p = \text{tang. } \frac{1}{2}\zeta$, est $\sqrt{\frac{1+\cos. \zeta}{2 \cos \zeta}}$.

Depuis le point où l'inclinaison est ζ jusqu'à l'infini, la densité est trop petite; c'est au calculateur à voir dans les différents cas si la valeur de ζ est telle, relativement à l'angle de chute, qu'il puisse espérer une compensation suffisante entre les erreurs. Si cela est, on pourra calculer l'amplitude plus simplement que par aucune autre méthode, en résolvant l'équation

$$\frac{4h'}{3} y = \frac{xx}{3-x},$$

dans laquelle on mettra pour y la hauteur du jet trouvée par la branche ascendante.

EXEMPLE :

67. Soit, comme ci-dessus,

$$h' = 0,4007072,$$

on aura

$$\text{L tang. } \zeta = 9,7277659,$$

et

$$\zeta = 28°7';$$

c'est donc à 28° 7' d'inclinaison que la densité sera vraie.

A 14°3' le *maximum* de densité $= 1\,\frac{1}{30}$. Mais, depuis le point de 28°7' jusqu'au point de chute, la densité diminue continuellement, d'où il est à présumer que l'amplitude sera trop grande; aussi, en prenant $y = 1,396186$, comme nous l'avons trouvée par la branche ascendante (52), et résolvant l'équation

$$\frac{xx}{3-x} = y \text{ tang. } \zeta = 0,7459486,$$

on trouve

$$x = 1,168763;$$

résultat un peu trop grand, mais qui approche beaucoup de la vraie amplitude 1,15814. Si l'on ajoute cette valeur de x avec l'amplitude de la branche ascendante trouvée (52), on aura, par cette méthode mixte, l'amplitude totale

$$3,196144$$

plus approchée de la vraie amplitude 3,195567 que tout ce que nous avons trouvé jusqu'à présent. Il y a sans doute un peu de hasard dans cette approximation ; nous savions cependant que l'amplitude de la branche ascendante était trop petite, que l'autre était trop grande, d'où il était naturel de conclure qu'en les ajoutant, les erreurs se détruiraient en partie. Dans d'autres cas, on pourra réussir tout aussi complétement.

68. L'hyperbole ordinaire ne satisfaisant à la question que dans un certain nombre de cas particuliers, considérons une hyperbole quelconque représentée par l'équation

$$y \text{ tang. } \zeta = \frac{b^{n+1}}{n\,(b-x)^n} - \frac{b}{n} - x.$$

La densité nécessaire pour la décrire sera

$$\frac{n+2}{b} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{1+p \text{ tang. } \zeta}}{\sqrt{1+pp}},$$

et comme on doit avoir au sommet

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2k'},$$

et la densité $= 1$,
on fera

$$b = n+2$$

$$\text{tang.}\zeta = \frac{n+1}{n+2} \cdot 2k'.$$

Il faudra donc examiner si l'on peut donner à n une valeur telle que

$$\frac{\sqrt[n+1]{1+p\ \text{tang.}\ \zeta}}{\sqrt{1+pp}}$$

ne soit pas trop variable depuis le sommet jusqu'au point de chute. Si cela est, on mettra pour y, la hauteur du jet, et l'on résoudra par les fausses positions l'équation

$$y\ \text{tang.}\ \zeta = \frac{b^{n+1}}{n\,(b-x)^n} - \frac{b}{n} - x.$$

69. Si l'on suppose n infini, la densité devient $\frac{1}{\sqrt{1+pp}}$, et l'équation précédente se change en celle-ci :

$$x + 2h'y = e^x - 1,$$

équation à la logarithmique qui est, par conséquent, une limite des hyperboles de tous les genres. La densité sera constamment trop petite dans cette courbe, et, par conséquent, l'amplitude trop grande. Néanmoins, si l'angle de chute n'est pas fort grand, on voit que la densité sera sensiblement constante, surtout vers le sommet, ce qui donnera l'amplitude assez exactement.

70. Dans notre exemple, l'angle de chute étant de 74°, la formule précédente serait trop défectueuse ; aussi, en faisant $y = 1{,}396186$, et $h = 0{,}400707$, on trouve

$$x = 1{,}199485,$$

résultat trop grand, mais qui n'est cependant pas fort loin de la vraie amplitude

$$1,15314.$$

71. Si l'on suppose n plus grand que l'unité, on conçoit qu'on aura des résultats moyens entre celui de l'hyperbole ordinaire et celui de la logarithmique. Ainsi, en faisant $n = 2$, on trouve, dans notre exemple, $x = 1,1775$.

72. Si l'on suppose n plus petit que l'unité, mais positif, l'amplitude diminuera à mesure que n sera plus petit. Ainsi, dans notre exemple où l'hyperbole ordinaire donne un résultat trop grand parmi les valeurs fractionnaires de n, il y en aura une qui donnera le vrai résultat. Soit $n = \frac{1}{2}$, on trouve

$$x = 1,16127$$

qui se rapproche de la vraie amplitude. Soit $n = \frac{1}{10}$, on trouve

$$x = 1,1518,$$

qui ne diffère presque plus de la vitesse, et qui paraît s'en écarter dans un autre sens. Il y aurait d'autres cas où, en diminuant n, même à l'infini, on ne ferait qu'approcher du vrai résultat, sans y tomber juste.

73. Enfin, si l'on fait n infiniment petit, l'équation de l'hyperbole devient

$$x + h'y = -2\,\mathrm{L}\,(1 - x),$$

autre espèce de logarithmique qui est la seconde limite des hyperboles de tous les genres. La densité nécessaire

pour la décrire est $\frac{1+h'p}{\sqrt{1+pp}}$; aussi, retombe-t-elle précisément avec celle que nous avons trouvée (59). L'amplitude qui en résulte dans notre exemple est 1,148615. Elle se trouve un peu plus juste que celle du n° 61 par les raisons que nous avons déjà alléguées (62).

ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE, LORSQUE L'ANGLE DE PROJECTION EST PETIT.

74. Les méthodes précédentes, surtout la seconde, approchent d'autant plus de la vérité, que l'angle de projection est plus petit. Mais comme cette supposition ne les simplifie pas, je donnerai d'autres formules suffisamment approchées et plus faciles à calculer. Pour cela, je prendrai la densité $=\frac{1}{\cos.\theta\sqrt{(1+pp)}}$, quantité qui variera fort peu, si p reste toujours assez petit. On aura donc $\frac{ddp}{dx}=\frac{dp}{\cos.\theta}$, d'où résulte

$$p=\text{tang.}\,\theta-\frac{1}{2h\cos.\theta}\left(e^{\frac{x}{\cos.\theta}}-1\right),$$

et

$$y=\left(\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2h\cos.\theta}\right)x-\frac{1}{2h}\left(e^{\frac{x}{\cos.\theta}}-1\right).$$

75. Si l'on nomme X l'amplitude de la tranche ascendante, et Y la hauteur du jet, on aura

$$X=\cos.\theta\,\text{L.}\,(1+2h\sin.\theta),$$

$$Y=(1+2h\sin.\theta)\frac{X}{2h\cos.\theta}-\sin.\theta.$$

On trouvera l'amplitude totale en faisant

$$y = o,$$

et résolvant l'équation

$$(1 + 2h \sin. \theta)\frac{x}{\cos. \theta} = e^{\frac{x}{\cos. \theta}} - 1.$$

76. Ces formules sont fort simples; mais pour se procurer une plus grande exactitude, lorsque l'angle de projection ne sera pas si petit, il sera bon de calculer séparément la branche descendante. On cherchera donc la hauteur due à la vitesse au sommet, par la formule ordinaire

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h \cos.^2 \theta} + \frac{\sin. \theta}{\cos.^2 \theta} + \text{L tang.} (45° + \tfrac{1}{2}\theta),$$

et l'on résoudra l'équation

$$1 + 2h'y = e^x - x;$$

dans laquelle on mettra pour y la hauteur du jet trouvée par la branche ascendante. Cette équation est déduite de la formule générale (74), en faisant $\theta = 0$, et changeant le signe de y : d'ailleurs elle s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée (69) pour la limite des hyperboles.

77. Quant au degré de précision de ces formules, il sera d'autant plus grand que l'angle de projection sera plus petit. Dans la branche ascendante, la densité croîtra depuis le point de projection où elle est 1, jus-

qu'au sommet où elle est $\frac{1}{\cos. \theta}$. Ainsi, l'amplitude de cette branche et la hauteur du jet seront trop petites. Si l'on calcule tout d'un coup l'amplitude totale, la branche descendante se trouvera affectée de deux erreurs; 1° parce que la vitesse au sommet est trop petite; 2° parce que la densité est trop grande, depuis le sommet jusqu'au point où l'inclinaison est θ, comme au point de projection; elle diminue, à la vérité, dans le reste de la branche descendante, mais pas assez pour procurer une exacte compensation. Cette méthode donnera donc les portées trop courtes; mais, en calculant séparément la branche descendante, on rectifie la vitesse au sommet, et comme en même temps la densité devient trop petite dans toute la branche descendante, l'amplitude en est augmentée, ce qui pourra corriger l'erreur de la branche ascendante. On voit, par ces raisons, que pour obtenir une grande approximation de ces nouvelles formules, il ne faut pas supposer l'angle de projection plus grand que 15 ou 20°, et il faut avoir soin de calculer séparément la branche ascendante et la branche descendante.

EXEMPLE 1.

78. Pour voir cependant quelle serait l'erreur de cette méthode, si on l'appliquait à de plus grands angles de projection, nous prendrons, comme à l'ordinaire, $h = 10$ et $\theta = 45°$. On aura l'amplitude totale en résolvant l'équation

$$(1 + 10\sqrt{2})\, x\sqrt{2} = e^{x\sqrt{2}} - 1,$$

qui donne

$$x = 2,94043.$$

Or, la vraie amplitude est 3,195567.

Ainsi, cette méthode donne la portée trop courte d'environ $\frac{1}{12}$. Mais, si nous calculons séparément la branche ascendante et la branche descendante, nous aurons une plus grande approximation. L'amplitude de la branche ascendante sera 1,92155, et la hauteur du jet 1,35032; quantités trop petites l'une et l'autre : cependant la hauteur du jet ne diffère de la vérité que d'environ $\frac{1}{30}$. On trouvera toujours, par ce moyen, la hauteur du jet plus approchée que l'amplitude de la branche ascendante, parce que la densité n'est sensiblement défectueuse que vers le sommet, ce qui influe peu sur la hauteur du jet. Pour avoir maintenant l'amplitude de la branche descendante, on résoudra l'équation

$$2h'y+1=e^x-x,$$

dans laquelle $h'=0,400707$ et $y=1,35032$, on aura donc $x=1,18346$ et l'amplitude totale 3,10501, qui n'est pas fort éloignée de la vraie amplitude 3,195567; elle est encore trop petite d'environ $\frac{1}{34}$.

Nous obtenons, par ce moyen, l'amplitude et la hauteur du jet avec une approximation presque égale, et qui suffirait dans bien des cas.

EXEMPLE 2.

79. Si la méthode précédente n'éloigne pas beaucoup de la vérité, lorsque l'angle de projection est de 45°, elle doit être infiniment plus approchée lorsque l'angle de projection est petit. Pour nous en assurer plus positivement, nous supposerons $h=10$ et $\varepsilon=10°$. On trou-

vera d'abord l'amplitude de la branche ascendante $X = 1,475293$, et la hauteur du jet $Y = 0,161389$. L'amplitude totale se trouvera directement en résolvant l'équation

$$(1 + 20 \sin. 10^\circ) \frac{x}{\cos. 10^\circ} = e^{\frac{x}{\cos. 10^\circ}} - 1;$$

d'ou résulte

$$\frac{x}{\cos. 10^\circ} 2,499989, \text{ et } x = 2,462002.$$

Nous savons d'avance que ces résultats sont trop petits; il faut voir de combien ils le sont.

80. Je calcule ces quantités par la troisième méthode, et je trouve

$$X = 1,478037, \quad Y = 0,161560.$$

Il n'y a donc que $\frac{1}{100}$ de différence sur l'amplitude et $\frac{1}{1000}$ sur la hauteur.

L'erreur doit être un peu plus grande, parce que la méthode troisième suppose aussi la résistance trop grande. Mais le *maximum* de la densité n'étant que de $1 \frac{1}{270}$, on voit que le point de comparaison dont nous nous sommes servis ne peut pas être sensiblement éloigné de la vérité.

81. Pour vérifier l'amplitude totale, je calcule séparément la branche descendante, en résolvant l'équation $2k'y + 1 = e^x - x$, dans laquelle $k' = 2,1854$ et $y = 0,161560$. Je trouve $x = 0,992896$, quantité qui doit être un peu trop grande. Ajoutant l'amplitude de la branche ascendante 1,478037, qui est un peu trop pe-

tite, j'en conclus l'amplitude totale 2,470933 qui doit être fort approchée. Mais, en se servant de la méthode troisième n° 58, on trouve $x = 0,991577$, d'où résulte l'amplitude plus exacte 2,469614.

82. Donc, si l'on calcule directement l'amplitude du jet par la méthode du n° 75, on trouve le résultat 5,462002 trop petit de $\frac{1}{340}$.

Si, en suivant la même méthode, on calcule séparément la branche descendante, l'amplitude qui en résulte, 2,467750 est trop petite de $\frac{1}{1300}$ seulement. Quant à la hauteur du jet, 0,161389, elle est trop petite aussi d'environ $\frac{1}{1000}$.

CALCUL DES TABLES.

83. C'est d'après ces différentes méthodes que nous avons calculé les tables qu'on trouvera à la fin de ce mémoire. Nous aurions bien désiré les rendre plus complètes, en ajoutant le temps de mouvement, l'angle de chute, et surtout la quantité dont l'amplitude augmente lorsque la densité diminue. Mais ces différents objets exigeant un travail immense, et le temps prescrit par l'Académie étant près d'expirer, nous n'avons pu l'entreprendre.

Si l'on examine les différences de nos résultats, on trouvera qu'elles n'ont point l'uniformité qu'elles devraient avoir, si tous les calculs étaient faits sur une même formule. C'est que nous nous sommes servis de différentes méthodes, suivant les différents cas. En général, l'amplitude et la hauteur du jet sont exactes, à moins de $\frac{1}{400}$, souvent à moins de $\frac{1}{1000}$. Les hauteurs des jets sont trop

petites jusqu'à environ 45°; il en est de même des amplitudes de la branche ascendante. Mais l'amplitude totale est tantôt trop grande, tantôt trop petite; ce qui occasionne des irrégularités dans les différences, sans que le calcul en soit moins juste.

84. Nous aurions pu, sans beaucoup de peine, augmenter considérablement le volume de ces tables, en les interpolant de degrés en degrés, et de dixièmes en dixièmes pour les valeurs de h; mais ce travail n'en aurait pas eu plus de mérite. Nous avons mieux aimé présenter ces résultats, tels que nous les avons trouvés, indépendamment les uns des autres. D'ailleurs ces tables ne sont encore qu'une pure spéculation, jusqu'à ce que l'expérience nous apprenne si la résistance est simplement proportionnelle au carré de la vitesse, ou si elle renferme d'autres termes dont nous n'avons pas tenu compte. Mais, quand même notre hypothèse serait conforme à l'expérience, il faudrait toujours avoir égard à la diminution de densité dans la partie supérieure de la trajectoire, diminution qui est très-sensible dans plusieurs cas de la balistique.

COMPARAISON DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES AVEC CELLE DE MM. LE CHEVALIER DE BORDA ET BEZOUT.

85. Nous avons déjà vu (55 et suiv.), en adoptant la méthode de M. le chevalier de Borda, par la branche descendante, que cette méthode donnait l'amplitude avec une exactitude suffisante, pourvu qu'on prît α autrement que ce savant géomètre. Car, en prenant α de manière à faire coïncider les densités extrêmes, il en résulte dans

l'exemple (61 à 63) $\frac{1}{24}$ d'erreur sur l'amplitude ; erreur qu'on peut diminuer considérablement en attribuant à α la valeur convenable. Quant à la méthode de M. le chevalier de Borda pour la branche ascendante, elle suppose la densité représentée semblablement par $\frac{1+\alpha p}{\sqrt{1+pp}}$. On peut voir les formules de l'auteur dans les mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'an 1769 ; il suffira d'en présenter le résultat dans notre exemple.

Lors donc que $h=10$ et $\varepsilon=45°$, on trouve, par cette méthode, l'amplitude de la branche ascendante $X=1{,}998064$, et la hauteur du jet $Y=1{,}381746$.

Or, les vraies valeurs de ces quantités, du moins celles que nous savons être très-proches des véritables, sont $X=2{,}042423$; $Y=1{,}3975$. Il y a donc environ $\frac{1}{47}$ d'erreur sur l'amplitude et $\frac{1}{90}$ sur la hauteur ; d'où il résulte que ces formules approchent moins de la vérité que celles de notre troisième méthode (51). Un seul exemple ne suffirait pas pour tirer cette conclusion ; mais si l'on compare les deux formules de densité

$$\frac{1+\alpha p}{\sqrt{1+pp}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1-\alpha p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+pp}},$$

on verra facilement que la dernière est la moins variable. M. le chevalier de Borda propose d'abord une autre méthode pour calculer la trajectoire dans toute son étendue ; c'est la même que nous avons donnée pour les petits angles de projection (74).

86. M. Bezout, dans son *Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie* (tom. IV), prend une route

différente. Il représente la trajectoire par l'équation $dx = \frac{-dp}{b-ap}$, et détermine les coefficients a et b, de sorte que la vitesse initiale et la vitesse au sommet soient les mêmes que dans la vraie trajectoire. La densité que cette méthode suppose est $\frac{a}{\sqrt{1+pp}}$, quantité qui varie depuis $a \cos. \theta$ jusqu'à a dans la branche ascendante, et encore plus dans la branche descendante. Ces variations, qui sont fort sensibles lorsque l'angle de projection est un peu grand, nuisent beaucoup à l'exactitude de cette méthode. Il est vrai que la valeur de a, qui est entre 1 et $\frac{1}{\cos. \theta}$, sert en partie à corriger les erreurs. Mais il y a un grand inconvénient à supposer la densité trop petite au point de projection; la moindre diminution en ce point peut influer beaucoup sur le reste de la trajectoire. Aussi la méthode de M. Bezout donne-t-elle les portées sensiblement trop grandes.

87. Sans rapporter les formules de l'auteur, nous nous contenterons d'en indiquer le résultat. Lorque $h = 10$ et $\theta = 45°$, elles donnent l'amplitude de la branche ascendante $X = 2{,}198969$, et la hauteur du jet $Y = 1{,}519316$; quantités trop grandes, l'une de $\frac{1}{13}$, l'autre de $\frac{1}{11}$. L'amplitude totale se trouve par la même méthode de 3,403946, qui ne diffère que de $\frac{1}{15}$ de la vraie amplitude 3,195567. D'où il suit que l'erreur sur la branche descendante est moindre que sur la branche ascendante.

88. La méthode de M. Bezout a beaucoup d'analogie avec la méthode que nous avons donnée pour les petits

angles de projection ; elles coïncideraient entièrement si M. Bezout eût pris

$$n = \frac{1}{\cos.\theta}.$$

Et comme nous avons trouvé dans le même exemple (78)

$$X = 1,92155$$

et

$$Y = 1,35032,$$

il est clair que notre méthode a de l'avantage sur celle de M. Bezout pour la branche ascendante. Quand on calcule directement l'amplitude du jet, sans connaître la branche ascendante, la méthode de M. Bezout donne 3,403946, et la nôtre 2,94043 ; ainsi le désavantage est de notre côté. Cela vient de ce que la vitesse au sommet n'est pas exacte dans notre méthode comme dans celle de M. Bezout ; aussi nous avons averti que cette méthode ne devait être employée que pour de petits angles de projection, ou du moins qu'il fallait la rectifier en calculant séparément la branche descendante. Il en résulte alors pour l'amplitude totale 3,10501, et l'erreur est deux fois moindre que celle de M. Bezout. Il en est de même de la hauteur du jet, qui est deux ou trois fois plus exacte par notre méthode.

89. Comparons encore ces méthodes lorsque l'angle de projection est plus petit ; elles doivent l'une et l'autre approcher davantage de la vérité. Je prends, comme au n° 79, $h = 10$ et $\theta = 10°$; il en résulte, suivant M. Bezout,

l'amplitude de la branche ascendante $X = 1{,}503883$,
la hauteur du jet $Y = 0{,}164635$,
et l'amplitude totale $= 2{,}506753$.
Ces différentes valeurs sont trop grandes de $\frac{1}{60}$, ce qui est fort loin du degré d'exactitude de notre méthode (82).

MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD AU CHANGEMENT DE DENSITÉ.

90. Les boulets de canon pouvant s'élever jusqu'à 8 ou 900 toises dans l'atmosphère, on conçoit que dans la partie supérieure de leur trajectoire, la résistance doit être sensiblement diminuée. Il faudra donc apporter quelques changements à nos formules, si nous voulons avoir égard à cette diminution de densité.

91. Ici la première méthode ne nous est d'aucun secours, car l'équation

$$e^{\frac{\theta}{k}} = 1 + \ldots, \text{ etc.},$$

sur laquelle elle est fondée, n'est vraie que pour le premier élément de la trajectoire. On en aurait, à la vérité, une semblable pour les éléments suivants; mais il faudrait changer à la fois h, k et θ, ce qui produirait beaucoup de complication et fort peu d'exactitude. Au contraire, la seconde méthode (30) s'applique ici tout naturellement. Il n'y a que la quantité α à changer dans la formule

$$\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

On supposera toujours que la densité est 1 au sommet : alors k, qui jusqu'à présent a représenté l'unité, sera 1 au sommet et $\frac{1}{\lambda}$ au point de projection, λ étant la densité à ce point. On aura par ce moyen

$$\alpha = \frac{\lambda \cos.\theta - \cos.^2\theta}{\sin.^2\theta},$$

et il faudra avoir attention de déterminer h suivant l'unité supposée. Le calcul fait, on changera, si l'on veut, les résultats, en prenant pour unité la valeur de k au point de projection. On éviterait ce changement d'unités, en donnant à la densité la forme $\frac{\beta + \alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$, et déterminant les coefficients α, β, de manière que la densité fût 1 au point de projection, et $\frac{1}{\lambda}$ au sommet. Mais l'exemple suivant fera voir qu'il n'y a pas d'inconvénient à laisser les formules trouvées telles qu'elles sont.

EXEMPLE.

92. Je suppose que la densité au sommet est à la densité au point de projection :: 4 : 5, et supposant toujours $h = 10\,k$, $\theta = 45°$, je cherche l'amplitude du jet.

Si la quantité variable k est supposée 1 au sommet, sa valeur au point de projection sera $\frac{4}{5}$; on aura donc

$$h = 8,\ \lambda = \frac{5}{4} \text{ et } \alpha = \frac{5}{4}\sqrt{2} - 1.$$

Puis, calculant l'amplitude du jet comme au n° 39, on trouvera $x = 2{,}695152$. Mais si l'on prend pour unité la valeur de k au point de projection, en sorte que la densité soit 1 à ce même point et $\frac{4}{5}$ au sommet, il faudra multiplier la valeur de x par $\frac{5}{4}$, et l'on aura l'amplitude $x = 3{,}368940$.

93. Lorsque la densité est constante, l'amplitude $= 3{,}195567$, d'où il suit que la densité diminuant de $\frac{1}{5}$ vers le sommet, l'amplitude augmente d'environ $\frac{1}{20}$ dans cet exemple. Mais il faut examiner avec quel degré de précision la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{1 + p^2}}$ représente la densité.

94. Soit la densité 1 au sommet et λ ou $\frac{5}{4}$ au point de projection. Dans la branche ascendante, il faut que la densité décroisse continuellement depuis $\frac{5}{4}$ jusqu'à 1 ; un *maximum* ou un *minimum* troublerait l'exactitude de nos formules. Or, effectivement le *minimum* de la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{1 + p^2}}$ aurait lieu, si l'on pouvait avoir

$$p^2 = \frac{1}{\alpha} - 2.$$

Mais cette quantité est négative, dans le cas présent, où

$$\alpha = \frac{5}{4}\sqrt{2} - 1.$$

Donc la densité décroît continuellement depuis le point de projection jusqu'au sommet, ce qui convient parfaitement à notre hypothèse. Ainsi, nous pouvons être sûrs que la branche ascendante et la vitesse au sommet seront déterminées très-exactement dans notre exemple.

Mais si l'on avait $\lambda < \frac{1 + \cos.^2 \theta}{2 \cos. \theta}$, la densité décroîtrait trop rapidement jusqu'à son *minimum*, qui serait plus petit que l'unité. Néanmoins ces petites inégalités n'empêcheraient pas que la branche ascendante ne fût calculée assez exactement.

95. Quant à la branche descendante, elle suppose la densité trop grande dans toute son étendue, puisqu'à 45° d'inclinaison, ce qui est encore loin du point de chute, la densité est $\frac{5}{4}$, comme au point de projection. Il ne faut pas croire cependant qu'en vertu de cette cause l'amplitude soit fort augmentée; comme la densité sera toujours vraie dans une étendue sensible vers le sommet, il n'y aura que l'extrémité de la trajectoire de défectueuse, et c'est celle qui influe le moins sur l'amplitude. Au reste, on pourrait, pour plus d'exactitude, calculer séparément la branche descendante, en prenant une valeur plus petite de α.

96. Essayons maintenant si la troisième méthode ne nous mènerait pas au même but d'une manière plus simple.

D'abord la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + pp}},$$

qui représentait la densité dans la branche ascendante,

peut s'appliquer au cas où la densité est variable. Au lieu de prendre

$$\alpha = \sin.\theta \cos.\theta,$$

on fera en sorte que la densité soit λ au point de projection, ce qui donnera

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - \cos.^2\theta}{\lambda^2 \tan g.\theta}.$$

Le *maximum* de la densité aura lieu, lorsque

$$p = \frac{1}{3\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{9\alpha^2} - \frac{1}{3}};$$

d'où il suit que si

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

il n'y aura point de *maximum*, et la densité décroîtra continuellement depuis le point de projection jusqu'au sommet.

Dans notre exemple $\theta = 45°$, $\lambda = \frac{5}{4}$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{17}{25} > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

donc il n'y aura pas de *maximum*, et la densité sera représentée exactement par notre formule. Il en serait de même si θ était plus petit. Mais si l'on avait, par exemple,

$\theta = 60^\circ$, quel que fût λ, α serait plus petit que $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et par conséquent il y aurait à la fois un *maximum* et un *minimum*. Dans le cas présent, où $\lambda = \frac{5}{4}$, le *minimum* aurait lieu à 52° d'inclinaison ; il serait 0,984. Le *maximum* répondrait à 17°, et serait 1,035. Au reste, si la densité paraît diminuer assez rapidement, pour qu'à 52° d'inclinaison elle soit déjà moindre qu'au sommet, la portée n'en doit pas être fort augmentée ; car il faut que le projectile parcoure environ la moitié de l'amplitude de la branche ascendante, avant que sa direction soit changée de 8°. Ces inégalités ne doivent donc pas faire craindre de grandes erreurs, et n'empêchent pas que notre méthode ne soit admissible pour des angles de projection même au-dessus de 60°.

97. Comme on a substitué la valeur de α dans les formules du n° 51, et que cette valeur est maintenant différente, voici celles qu'il convient d'employer :

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - \cos.^2\theta}{\lambda^2 \operatorname{tang}.\theta},$$

$$C = \frac{\cos.\theta}{\lambda} - \frac{\alpha}{4h\cos.^2\theta},$$

$$X = 1 - \frac{\cos.\theta}{\lambda} + CL\left(\frac{1-C}{\frac{\cos.\theta}{\lambda} - C}\right),$$

$$Y = (1-C^2)\frac{X}{\alpha} - \frac{C}{2}\operatorname{tang}.\theta - \frac{1}{3\alpha}\left(1 - \frac{\cos.^3\theta}{\lambda^3}\right).$$

98. Ces formules donneront l'amplitude de la branche ascendante et la hauteur du jet. Pour calculer l'amplitude **de la branche descendante**, il faut commencer par déterminer la hauteur h' due à la vitesse au sommet. Nous la trouverons par la valeur $\frac{dp}{dx}$ au sommet, et nous aurons (51)

$$\frac{1}{2h'}=\frac{1-C}{\frac{1}{2}\alpha}.$$

Mais la formule de la seconde méthode (33) nous donnera plus exactement cette valeur de $\frac{dp}{dx}$, et, mettant la valeur de α qui lui convient, nous aurons

$$\frac{1}{h'}=\frac{1}{h\cos.^{2}\theta}+\frac{4}{3}\operatorname{tang.}\theta+\frac{2\lambda\sin.\theta}{3\cos.^{3}\theta}.$$

La raison pour laquelle nous préférons cette valeur de h', c'est que la formule

$$\frac{1+\alpha p^{2}}{\sqrt{1+p^{2}}}$$

ne change pas sensiblement vers le sommet, ce qui est plus conforme à la vraie densité. Il faut avouer qu'il y a sur cet élément un peu d'incertitude; car il ne suffit pas que la densité diminue depuis le point de projection jusqu'au sommet, d'une quantité donnée, il faut encore connaître la loi de cette diminution, et chaque loi que l'on supposera donnera un résultat différent pour la vitesse au sommet. Si l'on était scrupuleux là-dessus, on

pourrait calculer les densités qui répondent à différentes valeurs de y, et voir dans quelle hypothèse la dimiuution de densité serait plus exactement proportionnelle à y. C'est cette hypothèse qu'il faudrait admettre.

99. Cela posé, nous représenterons la densité dans la branche descendante par $\frac{1+\alpha p}{\sqrt{1+pp}}$, et pour qu'elle soit λ au point de chute où je suppose $p=m$, il faudra prendre

$$\alpha=\frac{\lambda\sqrt{\alpha+m^2}-1}{m}.$$

Mais comme la densité a un *maximum*, qui est $\sqrt{1+\alpha\alpha}$, lorsque $p=\alpha$, il faut faire en sorte que α ne soit pas trop grand, afin que $\sqrt{1+\alpha\alpha}$ n'excède pas λ. Dans les cas où α serait trop grand, il faudrait prendre pour m la tangente d'un angle moindre que l'angle de chute, et il n'y a pas d'inconvénient. On pourrait encore diminuer λ; mais la meilleure manière, lorsque λ est sensiblement au-dessus de l'unité, c'est de supposer $\sqrt{1+\alpha\alpha}=\lambda$, ou $\alpha=\sqrt{\lambda^2-1}$. Ainsi, dans notre exemple, λ étant $\frac{5}{4}$, on prendra $\alpha=\frac{3}{4}$. Puis elle diminuera jusqu'au point de chute, où elle sera à peu près 1 comme au sommet. Par ce moyen, l'amplitude sera diminuée depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{3}{4}$; et elle sera augmentée dans le reste de la courbe; d'où résultera une espèce de compensation. Il paraît cependant que l'amplitude sera trop petite, et qu'on ferait encore mieux de prendre α un peu plus petit. En effet, la deusité, depuis le sommet jusqu'au point de chute, se trouvera tou-

jours comprise entre les limites 1 et $\frac{5}{4}$, comme on le désire; mais elle sera la plus grande dans les points qui ont le plus d'influence sur l'amplitude.

EXEMPLE :

100. Les mêmes choses étant supposées qu'au n° 92, je trouve par les formules précédentes (97) l'amplitude de la branche descendante

$$X = 1,699183,$$

et la hauteur du jet Y = 1,151767.

Ensuite la formule du n° 98 me donne

$$\frac{1}{h'} = 2,761844;$$

et comme α, suivant le n° précédent, doit être $\frac{3}{4}$, ou un peu moins, je prends $b = 1$ (n° 60). Il en résulte $\alpha' = 2h$ et l'équation à résoudre pour trouver l'amplitude de la branche descendante est

$$0,834056 + x = -2\,\mathrm{L}\left(\frac{\sin.\ 45^\circ - \frac{2}{2}x}{\sin.\ 45^\circ}\right).$$

Je trouve $x = 0,996730$,

et, par conséquent, l'amplitude totale = 2,695913.

J'augmente ces résultats de $\frac{2}{4}$, afin d'avoir leurs valeurs, en prenant pour unité le k du point de projection, et

j'ai l'amplitude de la branche ascendante	2,123979;
La hauteur du jet	1,439709;
L'amplitude de la branche descendante	1,245912;
L'amplitude totale	3,369891.

On voit que l'amplitude s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée par l'autre méthode (92). Cet accord vient, non de l'exactitude parfaite des deux méthodes, mais de ce qu'elles s'écartent de la vérité dans le même sens, car elles donnent toutes deux l'amplitude trop petite; et, si nous sommes sûrs qu'elles approchent beaucoup de la vérité, nous ne pouvons pas cependant dire que ce soit à $\frac{1}{1000}$ près.

REMARQUE.

101. M. Bezout, dans son *Cours d'artillerie* (pag. 445), donne une méthode pour avoir égard au changement de densité : Il suppose que la trajectoire a pour équation

$$dx = \frac{-dp}{A - Bp},$$

A et B étant des constantes; mais il en résulte que la densité

$$\frac{ddp}{dpds} = \frac{B}{\sqrt{1 + pp}},$$

quantité qui, bien loin de diminuer vers le sommet, est au contraire la plus grande en ce point. M. Bezout détermine les constantes A et B, de manière que la vitesse

initiale soit ce qu'elle doit être, et que la vitesse au sommet soit due à une hauteur $\frac{D}{D'}$ H. Il désigne par D et D' les densités au point de projection et au sommet, et par H la hauteur due à la vitesse au sommet, dans le cas d'une densité uniforme D. Cette hypothèse n'est appuyée sur aucun fondement certain, et il paraît que l'auteur, en se servant de l'équation

$$\frac{2pdx}{kk} = -d\,\text{tang. H} : [\text{C} - \text{tang.}\ (\tfrac{1}{2}\,\text{séc. H} + \tfrac{1}{2}\,\text{cot. H. L tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\text{H})],$$

n'a pas fait attention qu'elle supposait la densité constante, puisqu'elle résultait d'une intégration. M. Bezout calcule séparément la branche descendante, mais suivant les mêmes principes qui nous paraissent vicieux.

Nous avons voulu voir jusqu'à quel point ces suppositions éloigneraient de la vérité. En conséquence, nous avons calculé la trajectoire de l'exemple précédent par la méthode de M. Bezout, nous avons trouvé

L'amplitude la branche ascendante	2,5615;
La hauteur du jet	1,733;
L'amplitude de la branche descendante	1,1312;
L'amplitude totale	3,6927.

D'où il suit (100) que la hauteur du jet est trop forte d'un cinquième, et que l'amplitude est environ trois fois plus éloignée de la vérité que celle qu'on aurait, en supposant la densité constante et la même qu'au point de projection.

FORMULES POUR DÉTERMINER LE TEMPS.

102. La seconde méthode, où nous avons supposé la densité $=\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$, ne nous permet pas de déterminer l'expression du temps, car la formule $dpdx=-gdt^2$ donnant

$$dt\sqrt{g}=\sqrt{-dpdx};$$

si l'on substitue la valeur de dx (33), on a

$$dt\sqrt{g}=\frac{-dp}{\sqrt{\text{B}-p-\frac{\alpha}{3}p^3}},$$

quantité qui n'est point intégrable par les méthodes connues. Heureusement que la troisième méthode (47) est plus traitable; mais il faut calculer séparément le temps de la montée et celui de la descente.

TEMPS PAR LA BRANCHE ASCENDANTE.

103. On aura (51)

$$dt\sqrt{\frac{2g}{\alpha}}=\frac{-dp}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha p}-\text{C}}}.$$

Soit

$$\sqrt{1-\alpha p}-\text{C}=\omega^2,$$

on aura

$$dt\sqrt{\frac{2g}{\alpha}}=\frac{4}{\alpha}(\omega^2+C)\,d\omega;$$

d'où résulte

$$t\sqrt{\frac{2g}{\alpha}}=\frac{4}{\alpha}\left(\frac{\omega^3}{3}+C\omega\right)-\frac{4}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{12h\cos.^2\theta}+C\right)\sqrt{\frac{\alpha}{4h\cos.^2\theta}}.$$

Appelant donc T le temps de la montée, on aura

$$\frac{T}{4}\sqrt{2g\alpha}=\frac{1+2C}{3}\sqrt{1-C}-\left(\frac{\alpha}{12h\cos.^2\theta}+C\right)\sqrt{\frac{\alpha}{4h\cos.^2\theta}}.$$

La quantité g est 30,2 pieds, mais on aura soin de la réduire à la même unité que h, et alors T exprimera des secondes.

EXEMPLE 1.

104. Je suppose $b=10$, $\theta=45°$, et le milieu d'une densité uniforme, ce qui donne

$$\alpha=\sin.\theta\cos.\theta=\tfrac{1}{2}.$$

Soit de plus l'unité $k=3750$ pieds, en sorte que la vitesse initiale, qui est due à la hauteur $10k$, soit d'en-

viron 1500 pieds par seconde. Pour trouver le temps de la montée, on fera

$$g = \frac{30,2}{3750},$$

et l'on trouvera

$$T = 14',94.$$

EXEMPLE 2.

105. Si l'on suppose que la densité diminue à mesure que le corps monte, en sorte qu'elle ne soit plus que $\frac{4}{5}$ au sommet, tout restant d'ailleurs comme dans l'exemple précédent, on prendra

$$\alpha = \frac{17}{25},\ h = 8,$$

parce que l'unité change, et

$$g = \frac{4}{5} \cdot \frac{30,2}{3750}$$

par la même raison; d'où l'on conclura

$$T = 15',39.$$

TEMPS PAR LA BRANCHE DESCENDANTE.

106. La densité étant

$$\frac{1 + \alpha p}{\sqrt{1 + pp}},$$

on a (56)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(1 + \alpha p)^2 - C^2}{2\alpha}.$$

Donc

$$dt\sqrt{g} = \frac{dp\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(1 + \alpha p)^2 - C^2}},$$

et en intégrant

$$t\sqrt{\frac{g\alpha}{2}} = L\left(\frac{1 + \alpha p + \sqrt{(1 + \alpha p)^2 - C^2}}{1 + \sqrt{1 - C^2}}\right),$$

formule qui donnera le temps de la descente en mettant pour p la tangente de l'angle de chute.

EXEMPLE 1.

107. Soit, comme au n° 61,

$$\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = \text{tang. } 74^\circ, \quad C^2 = -0,03371,$$

soit de plus $g = \frac{30,2}{3750}$, la densité étant constante, on aura $t = 21',03$.

La vitesse étant moindre, il n'est pas étonnant que le temps de la descente soit plus long que celui de la montée; les deux temps réunis donnent 36' en nombres ronds. Si l'on voulait plus de précision, il faudrait chercher une valeur plus exacte de l'angle de chute.

EXEMPLE 2.

108. Pour calculer le temps de la descente, lorsque la densité diminue de $\frac{1}{7}$ au sommet, on prendra la même valeur qu'au n° 100 ; on supposera de plus $g = \frac{30,2}{3750}$ et $p =$ tang. 74°, ce qui donnera $t = 22'',43$.

Donc, la diminution de la densité augmente le temps total d'environ 1'',8.

FORMULE DU TEMPS LORSQUE L'ANGLE DE PROJECTION EST PETIT.

109. Dans ce cas nous avons (74)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h\cos.^2\theta}\, e^{\frac{x}{\cos.\theta}},$$

donc

$$dt\sqrt{2gh} = \frac{dx}{\cos.\theta}\, e^{\frac{x}{2\cos.\theta}} - 1;$$

d'où l'on tire

$$t\sqrt{\tfrac{1}{2}gh} = e^{\frac{x}{2\cos.\theta}} - 1,$$

formule très-simple, qui donnera t en secondes, si l'on exprime g avec la même unité que h.

EXEMPLE 1.

110. Soit, comme au n° 79,

$$h = 10, \quad \theta = 10°,$$

soit de plus l'unité $k = 3750$ pieds.

Si on demande le temps total du mouvement, on fera $x = 2,462$, et l'on trouvera

$$t = 12'{,}41.$$

EXEMPLE 2.

111. Soit encore $k = 3750$ pieds, $h = 10$, mais $\epsilon = 45°$. Si on prend l'amplitude trouvée (78), savoir :

$$x = 2{,}94,$$

on trouvera

$$t = 38'{,}86.$$

Or, nous avons trouvé 36' par une méthode plus exacte. On voit donc que la formule précédente détermine le temps d'une manière assez approchée, même lorsque l'angle de projection est grand, pourvu qu'on substitue pour x l'amplitude trouvée tout d'un coup par l'équation du n° 75; car si l'on eût substitué pour x la vraie amplitude 3,196, il en serait résulté $t = 42'\ 91$, ce qui est trop éloigné de la vérité.

DE L'ANGLE DE LA PLUS GRANDE PORTÉE.

112. Cet angle est de 45° dans le vide, mais il est moindre dans un milieu résistant, et d'autant moindre, que la résistance est plus grande. On en jugera mieux

par les tables ci-après que par les formules prolixes que nous pourrions produire à ce sujet. Ainsi, lorsque $h = 9$, ou lorsque la résistance initiale vaut neuf fois le poids du corps, on voit que l'angle de la plus grande portée est entre 30 et 35°, mais plus près de 35.

On trouvera facilement par les interpolations, que cet angle est de 32° 55′ $\frac{2}{3}$, et que la portée correspondante $= 3{,}2439$.

EXPÉRIENCES SUR LES PORTÉES DES BOMBES ET DES BOULETS.

113. Si nous avions une suite d'observations exactes sur les portées des pièces d'artillerie, nous pourrions maintenant décider si la résistance est simplement proportionnelle au carré de la vitesse, ou si elle renferme quelque autre terme dont nous n'avons pas tenu compte. Dans le cas où notre supposition serait suffisamment d'accord avec l'expérience, les tables que nous avons dressées seraient des tables de balistique telles que l'Académie paraît les désirer. Il resterait à les étendre et à les interpoler pour d'autres valeurs de h, à fixer l'unité pour différents calibres et à y ajouter quelques éléments pour en rendre l'usage plus commode. Nous connaîtrions en même temps la force de la poudre et la résistance de l'air avec plus d'exactitude qu'on n'a pu les déterminer jusqu'à présent. Mais toutes ces connaissances nous manquent à la fois, faute d'observations sur lesquelles on puisse compter. La force de la poudre est si variable, elle dépend de circonstances si minutieuses, qu'avec toutes les précautions possibles, les portées sous le même angle et avec la même charge diffèrent souvent entre

elles d'un dixième, et quelquefois plus. Il faudrait donc une quantité prodigieuse d'épreuves, pour avoir quelque degré de certitude sur leur résultat; et quand même on aurait des tables dressées avec toute l'exactitude possible, on pourrait toujours craindre dans la pratique un vingtième d'erreur sur les portées.

114. Les tables qui suivent sont tirées du cours d'artillerie déjà cité; elles renferment plusieurs épreuves faites à La Fère en 1740 et 1771. On en a de plus récentes, et sur différents calibres; mais les angles de projection sont trop petits pour qu'elles nous soient de quelque utilité.

TABLE I.

Portées d'une pièce de 24 chargée à 9 livres de poudre, le diamètre du boulet étant de 5 po. $\frac{4}{5}$.

Angle de projection.	Portée.	Angle de projection.	Portée.
1° 11'	300 toises	30°	1910 toises
4	820	35	2020
15	1675	40	2050
20	1740	45	2200
25	1825		

TABLE II.

Portées d'une pièce de 24 chargée à 8 livres ½ de poudre, le diamètre du boulet étant 5 po. ½.

Angle de projection.	Portées observées dans plusieurs épreuves.	Portée moyenne.	Temps.
	Toises.	Toises.	
5°	898 — 910 927 — 916	940	7″
10	1199 — 1218 1237 — 1273	1232	10¼
15	1495 — 1588 1650 — 1669	1600	15¼
20	1636 — 1689 1783 — 1796	1726	19
25	1740 — 1766 1805 — 1909	1805	20
30	1843 — 1877 1945 — 2030	1924	24½
35	1839 — 1852 1871 — 1960	1881	27
40	1851 — 1913 1967 — 2001 2023	1951	32⅘
43	2146 — 2163 2176 — 2210 2221	2183	34
45	1955 — 2032 2040 — 2094 2167	2058	34
50	1952 — 1972 1980 — 2000	1976	36
60	1497 — 1584 1689 — 1766	1631	43½
70	1123 — 1194 1271 — 1351	1235	46
75	882 — 885 910 — 917	899	48¾

TABLE III.

Portées de bombes du poids de 142 livres et de 11 p. 10 lig. de diamètre, jetées par une charge de poudre de 3 liv. $\frac{3}{4}$.

Inclinaison.	Portées observées.	Portée moyenne.	Temps.
	Toises.	Toises.	
10°	221 — 228 249 — 257	239	4″
20	394 — 398 424 — 440	414	$7\frac{1}{2}$
30	451 — 492 516 — 537	499	$10\frac{3}{4}$
40	544 — 569 574 — 577 575	568	$14\frac{2}{3}$
43	506 — 509 517 — 544 543	524	14
45	489 — 490 505 — 554 536	515	$15\frac{1}{5}$
50	481 — 488 507 — 512	497	16
60	424 — 448 457 — 457	447	$19\frac{1}{2}$
70	297 — 328 349 — 349	331	22
75	256 — 261 265 — 298	270	22

115. Il ne faut pas un examen bien rigoureux pour voir que ces expériences ne sont point d'accord entre elles, et qu'il en faudrait un bien plus grand nombre pour répandre quelque lumière sur les objets qui nous intéressent. Tant qu'on ne trouvera pas moyen de rapprocher davantage les expériences les unes des autres, il n'y a que le nombre de ces résultats qui puisse suppléer à leur exactitude. Ainsi pour travailler d'une manière utile à la perfection de la balistique, il faudrait faire de cinq en cinq degrés cent épreuves au moins pour le même calibre, afin que la portée moyenne sous chaque inclinaison fût exacte à un centième près. On observerait que tout fût égal dans ces expériences, même l'état de l'atmosphère, s'il était possible. Si les résultats s'accordaient pour un calibre avec notre théorie, il suffirait pour les autres calibres de faire des expériences semblables sous deux inclinaisons différentes, par exemple sous 10 et sous 35 degrés. La théorie achèverait les tables pour d'autres degrés d'inclinaison.

MESURE DE LA RÉSISTANCE SUIVANT NEWTON.

116. Supposons, avec Newton, que la résistance d'un globe est la moitié de celle qu'éprouve son grand cercle, et que la résistance d'une surface plane est égale au poids d'une colonne d'air qui a pour base la surface choquée, et pour hauteur la hauteur due à la vitesse. Nous savons que cette mesure réussit assez bien pour les petites vitesses auxquelles Newton a soumis les globes; on peut donc s'en servir jusqu'à ce qu'on en connaisse une meilleure. Soit a le diamètre du projectile, δ sa densité,

δ' celle de l'air, π le rapport de la circonférence au diamètre, la résistance absolue sera

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{\delta' u^2}{2}.$$

Divisant cette quantité par la masse du globe, on aura la force retardatrice

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{\delta'}{\delta} \cdot \frac{u^2}{a}$$

que nous avons nommée ci-dessus $\frac{u^2}{2k}$; donc

$$k = \frac{4}{3} a . \frac{\delta}{\delta'};$$

c'est la quantité que nous avons prise pour unité dans nos formules.

117. De là on pourrait déduire ce théorème de M. le chevalier de Borda :

« *Si les hauteurs dues aux vitesses de projection sont* « *comme les diamètres des boulets, les portées sous des* « *angles égaux seront comme ces mêmes diamètres, et* « *les trajectoires seront semblables.* »

118. Lorsqu'on voudra avoir égard à la diminution de densité dans la partie supérieure de la trajectoire, on calculera grossièrement la hauteur du jet Y et l'on cherchera la densité qui convient à cette hauteur. Mais, sans consulter des tables de densité, il suffira, pour cet objet,

d'employer la formule de M. Daniel Bernoulli, qui donne pour la densité à la hauteur Y,

$$\frac{3700}{3700 + Y},$$

la densité à l'horizon étant 1, et Y exprimant des toises.

CALCUL DES ÉPREUVES DE LA TABLE 1.

119. Le diamètre du boulet étant de 5 pouces $\frac{4}{9}$, et la densité de l'air étant environ 6047 fois moindre que celle du fer fondu, on aura

$$k = 610 \text{ toises.}$$

Il faut voir d'après cette unité quelles sont les valeurs de h qui peuvent donner les amplitudes observées. Je rejette d'abord la portée sous 45°, parce qu'elle est trop éloignée des autres, et je réduis celles-ci en unités de 610 toises. Ainsi la portée sous 40° devient 3,36, et la valeur de h qui donne cette portée est, suivant nos tables, 10,68 à peu près. Calculant de même les valeurs de h qui donneraient les autres portées, je trouve

40°	—	—	$h = 10,68$
35	—	—	$h = 9,97$
30	—	—	$h = 8,21$
25	—	—	$h = 7,75$
20	—	—	$h = 7,85$
15	—	—	$h = 8,95$

La différence de ces résultats tient sans doute à bien des causes, mais principalement à l'inexactitude des expériences et à l'erreur qu'il peut y avoir dans la valeur de k. On pourrait croire d'abord qu'une partie de ces différences doit être attribuée à la diminution de densité dont nous n'avons pas tenu compte, mais alors les valeurs de h devraient croître continuellement depuis la portée de 15° jusqu'à celle de 40. Or elles commencent par décroître sensiblement.

120. Puisque la diminution de densité n'explique pas les différences que nous trouvons dans les valeurs de h, changeons l'unité, et, au lieu de 610 toises, supposons

$$k = 905,$$

nous trouverons, suivant les différents degrés d'inclinaison,

40	—	—	$h = 3,42$
35	—	—	$h = 3,28$
30	—	—	$h = 3,01$
25	—	—	$h = 3,02$
20	—	—	$h = 3,23$
15	—	—	$h = 3,82$

valeurs qui s'accordent entre elles un peu moins mal que les précédentes. On voit par là quelle incertitude il y a sur la vraie mesure de la résistance et sur la vitesse de projection.

121. Si, dans l'hypothèse de $k = 610$ toises, on prend le milieu des valeurs de h, on trouvera

$$h = 8,895 = 5426 \text{ toises.}$$

Calculant d'après cette valeur les portées sous différents degrés d'inclination, on trouverait des résultats qui cadreraient à peu près avec les portées observées, ou du moins qui ne s'en écarteraient pas plus que ces portées ne s'écartent entre elles. C'est ainsi qu'en a usé M. Bezout dans son *cours d'artillerie;* mais il n'y a rien à conclure de ces approximations.

122. En effet si l'on suppose $k = 915$ toises, ce qui diminue la résistance d'un tiers, nous avons vu qu'on satisfaisait mieux aux expériences. Or, la valeur moyenne de h qui en résulte est 3,30 ou 3019 toises. Voilà donc la valeur de h réduite presqu'à la moitié, et cette seconde hypothèse est plus vraisemblable, puisqu'elle cadre mieux avec l'expérience. Dans le premier cas la vitesse initiale aurait été de 1400 pieds par seconde, dans celui-ci elle n'est plus que de 1050.

123. La seule conséquence que je tirerai de là, c'est que la vitesse initiale d'un boulet de 24 n'est peut-être pas aussi considérable qu'on l'a cru jusqu'à présent; et ce qui peut confirmer ce soupçon, c'est que l'angle de la plus grande portée ne paraît pas être fort au-dessous de 45°. La vitesse initiale étant plus petite qu'on ne la supposait, on aura moins à craindre que la résistance n'augmente prodigieusement par la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure du globe, et nos tables s'accorderont d'autant mieux avec l'expérience.

124. Je n'entrerai pas dans d'autres détails sur les ex-

périences que j'ai rapportées. Celles de la table II ne s'accordent pas plus que celles de la table I, et celles de la table III, qui ne sont pas beaucoup plus exactes, supposent une vitesse initiale un peu plus petite que dans les tables ci-après. Il aurait fallu prolonger celle-ci en donnant à h les valeurs 0,8 ; 0,6, etc.

125. Si l'on avait une suite d'expériences exactes, voici comment il faudrait s'y prendre pour les calculer. On choisirait, par exemple, les portées sous 35 et 10° ; après avoir pris leur rapport, on chercherait dans la table la valeur de h ou de $\frac{h}{k}$ qui donne le même rapport, on aurait aussitôt les valeurs absolues de h et de k. On verrait ensuite si ces valeurs donnent les autres portées conformément à l'expérience ; mais, pour plus d'exactitude, il faudrait tenir compte de la diminution de densité. Une première approximation ferait connaître assez exactement la hauteur du jet, et par conséquent la quantité dont la densité diminue à cette hauteur. On chercherait donc suivant chaque angle de projection la partie de l'amplitude qui est due à la diminution de densité, et retranchant cette partie de chaque portée observée, les restes seraient les vraies amplitudes dans l'hypothèse d'une densité constante. On chercherait ensuite une nouvelle valeur de $\frac{h}{k}$ qui y satisfît, et delà résulteraient les valeurs absolues de h et de k beaucoup plus exactement que par le premier calcul ; mais il faudrait que les valeurs trouvées par deux portées choisies satisfissent à toutes les autres, sans quoi l'hypothèse de résistance qui sert de base à nos calculs serait fausse.

Telles sont les recherches que je soumets au jugement

de l'Académie ; elles auraient été plus dignes d'être présentées à cette illustre compagnie, si l'expérience m'eût fourni des secours suffisants.

APPENDICE.

I. *Sur la trajectoire dans les milieux dont la résistance est en partie constante et en partie proportionnelle au carré de la vitesse.*

126. Si la résistance, outre la partie $\frac{u^2}{2k}$ proportionnelle au carré de la vitesse, contenait une partie constante αg, les équations du mouvement seraient (3)

$$dxdp = -gdt^2$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{u^2}{2k} + \alpha g\right)\frac{dx}{u}.$$

Je divise la seconde par $\frac{dx}{dt}$, et mettant, au lieu de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dt}{u}$, leurs valeurs $\frac{u}{\sqrt{1+pp}}$ et $\frac{-dp}{g\sqrt{1+pp}}$, j'ai l'équation

$$-\frac{du}{u^3} + \frac{1}{u^2}\left(\frac{pdp}{1+pp} + \frac{\alpha dp}{\sqrt{1+pp}}\right) = -\frac{1}{2gk}\cdot\frac{dp}{\sqrt{1+pp}}$$

qui, étant intégrée à la manière des équations linéaires, donne

$$\frac{u^2}{2gk}=\frac{(\alpha^2-1)(1+pp)}{C[\sqrt{(1+pp)}-p]^{2\alpha}+p\sqrt{(+pp)}-\alpha pp-\frac{1}{2\alpha}}.$$

On déterminera la constante C par cette condition, que $u=V=\sqrt{2gh}$, lorsque $p=\text{tang }\theta$.

Cette intégrale est donc algébrique, excepté dans le cas de $\alpha=0$, comme ci-dessus, et dans le cas de $\alpha=\pm 1$.

127. L'équation

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\left(\frac{u^2}{2k}+\alpha g\right)\frac{dx}{u}$$

peut être encore mise sous la forme

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right):\frac{dx}{dt}=-\frac{ds}{2k}+\frac{\alpha dp}{\sqrt{1+pp}},$$

d'où résulte l'intégrale

$$A\frac{dx}{dt}=(p+\sqrt{1+pp})^{\alpha}.e^{-\frac{s}{2k}},$$

dans laquelle

$$A=\left(\frac{1+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right)^{\alpha}:V\cos.\theta,$$

Ces deux intégrales combinées donneront

$$\left(\frac{1+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right)^{2\alpha} \cdot \frac{k(\alpha^2-1)}{h\cos.^2\theta} \cdot e^{\frac{s}{k}} = C - \left[\sqrt{(1+pp)}+pp\right]^{2\alpha}\left(p\sqrt{(1+pp)} - \alpha pp - \frac{1}{2\alpha}\right).$$

D'où l'on pourra calculer la trajectoire par parties, comme dans la méthode première (17).

128. Si la partie constante de la résistance était égale à la moitié du poids du corps, on aurait $\alpha = \frac{1}{2}$, et l'équation précédente se simplifierait beaucoup; elle deviendrait

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h\cos.^3\theta}{k(1+\sin.\theta)} \cdot \left[C' + p^3 + (pp-2)\sqrt{1+pp}\right],$$

et les valeurs séparées de dx et dy seraient intégrales.

129. On pourrait employer ces formules pour déterminer le mouvement d'un projectile dont la vitesse initiale serait de plus de 1200 pieds, dans l'hypothèse que la résistance serait alors augmentée de toute la pression de l'atmosphère sur la surface antérieure du globe. Ce surcroît de résistance serait représenté par αg; il cesserait d'avoir lieu lorsque la vitesse serait réduite à 1200 pieds, et alors on reprendrait les formules ordinaires. Au reste, ces déterminations seraient encore bien hypothétiques; 1° parce que, en supposant un vide derrière le corps, la pression de l'atmosphère ne peut pas agir lorsque l'air lui-même est en mouvement, comme elle agit lorsque l'air est en repos; 2° parce que la vitesse du corps devenant moindre que 1200 pieds, on ne peut pas supposer qu'il y ait tout d'un coup équilibre entre

les pressions de l'atmosphère sur les deux surfaces antérieure et postérieure. Ces difficultés seraient beaucoup moindres, si la vitesse initiale des boules était, comme nous le soupçonnons, sensiblement au-dessous de celle qu'on leur attribue. Il en résulterait aussi que la résistance de l'air n'est pas si considérable ; et ce qui peut le faire présumer, c'est que l'air ne pouvant s'échapper latéralement en assez grande quantité, fuit devant le corps et diminue la pression du reste de la masse.

II. *Sur la trajectoire dans les milieux dont la densité à la hauteur* y, *est* $\frac{a}{a+y}$.

130. Cette hypothèse de densité convient parfaitement à l'atmosphère, surtout pour les petites hauteurs auxquelles s'élèvent les boulets, on fera alors $a = 3700$ toises, si y exprime aussi des toises (118). Si dans l'équation générale $kddp = dpds$, on substitue $\frac{a}{a+y}$, au lieu de $\frac{1}{k}$, on aura

$$\left(1+\frac{y}{a}\right)ddp = dpds = dpdx\sqrt{1+pp},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\left(1+\frac{y}{a}\right)\frac{dp}{dx} = \frac{pp}{2a} + \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+pp} + \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\left(p+\sqrt{1+pp}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{C},$$

et la constante sera

$$C = \frac{\text{tang.}^2\theta}{a} + \frac{1}{h\cos.^2\theta} + \frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + \text{L tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Mais

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g(1+pp)}{u^2},$$

de là on déduit

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{\left(1+\frac{y}{a}\right)(1+pp)}{C - \frac{pp}{\alpha} - p\sqrt{1+pp} - L\left(p+\sqrt{1+pp}\right)}.$$

C'est la hauteur due à la vitesse en un point quelconque, en prenant toujours pour unité la valeur de k au point de projection.

131. Représentons l'équation trouvée par

$$\left(1+\frac{y}{a}\right)\frac{dp}{dx} = -P;$$

P étant une fonction connue de p, on aura, en séparant,

$$\frac{dy}{1+\frac{y}{a}} = -\frac{pdp}{P},$$

donc

$$1+\frac{y}{a} = e^{-\int\frac{pdp}{aP}},$$

et

$$x = \int -\frac{dp}{P} e^{-\frac{pdp}{aP}},$$

d'où il suit que la trajectoire peut se construire par les quadratures.

132. Nous ne nous arrêterons pas aux conséquences qu'on pourrait déduire de ces formules, nous observerons seulement que la hauteur h', due à la vitesse au sommet s'exprime fort simplement par la formule

$$\frac{\lambda}{h'} = \frac{\text{tang.}^2\theta}{a} + \frac{1}{h\cos.^2\theta} + \frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + \text{L tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Les quantités qui y entrent sont assez connues par ce qui précède. Cependant nous rappellerons que la valeur de k est 1 au point de projection et λ au sommet; donc la densité est 1 au point de projection et $\frac{1}{\lambda}$ au sommet; connaissant la hauteur du jet Y et la densité au sommet $\frac{1}{\lambda}$ on connaîtra a par l'équation

$$\lambda = 1 + \frac{Y}{a}, \text{ ou } \textit{vice versâ}.$$

Appliquant cette formule à l'exemple n° 100, on trouvera que la valeur de h' est d'environ $\frac{1}{30}$ plus grande que nous ne l'avions supposée alors d'après les formules du n° 98.

TABLES

pour déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu d'une densité uniforme, la résistance étant proportionnelle au carré de la vitesse.

(Voyez l'article 83.)

TABLE I. $h = 1$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,1601	0,0072	0,8454	0,1519	0,3120
10	0,2936	0,0272	0,7217	0,2676	0,5612
15	0,4029	0,0577	0,6196	0,3558	0,7588
20	0,4919	0,0971	0,5330	0,4223	0,9142
25	0,5595	0,1432	0,4581	0,4711	1,0306
30	0,6078	0,1945	0,3923	0,5040	1,1119
35	0,6379	0,2494	0,3336	0,5233	1,1612
40	0,6507	0,3065	0,2807	0,5302	1,1809
45	0,6474	0,3647	0,2328	0,5253	1,1727
50	0,6289	0,4227	0,1892	0,5096	1,1386
55	0,5966	0,4800	0,1496	0,4834	1,0800
60	0,5514	0,5362	0,1139	0,4466	0,9981

TABLE II. $h = 2$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,2979	0,0137	1,4727	0,2711	0,5691
10	0,5194	0,0498	1,1494	0,4432	0,9626
15	0,6864	0,1028	0,9275	0,5600	1,2464
20	0,8150	0,1685	0,7634	0,6393	1,4543
25	0,9064	0,2445	0,6353	0,6942	1,6006
30	0,9672	0,3270	0,5312	0,7278	1,6949
35	1,0006	0,4140	0,4439	0,7436	1,7442
40	1,0093	0,5037	0,3690	0,7442	1,7535
45	0,9954	0,5943	0,3034	0,7311	1,7265
50	0,9612	0,6847	0,2454	0,7052	1,6665
55	0,9086	0,7743	0,1937	0,6670	1,5756
60	0,8393	0,8634	0,1475	0,6155	1,4548

TABLE III. $h = 3$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,4190	0,0196	1,9566	0,3678	0,7868
10	0,7030	0,0693	1,4325	0,5703	1,2733
15	0,9053	0,1400	1,1117	0,6975	1,6028
20	1,0558	0,2265	0,8919	0,7800	1,8358
25	1,1581	0,3238	0,7293	0,8327	1,9908
30	1,2226	0,4287	0,6023	0,8628	2,0854
35	1,2542	0,5385	0,4989	0,8743	2,1285
40	1,2567	0,6507	0,4121	0,8696	2,1263
45	1,2331	0,7638	0,3376	0,8502	2,0833
50	1,1862	0,8765	0,2724	0,8173	2,0035
55	1,1184	0,9884	0,2147	0,7719	1,8903
60	1,0321	1,1004	0,1635	0,7120	1,7441

TABLE IV. $h = 4$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,5270	0,0251	2,3413	0,4485	0,9755
10	0,8577	0,0865	1,6333	0,6682	1,5259
15	1,0836	0,1718	1,2343	0,7988	1,8824
20	1,2478	0,2747	0,9739	0,8799	2,1277
25	1,3556	0,3892	0,7876	0,9300	2,2856
30	1,4206	0,5116	0,6454	0,9563	2,3769
35	1,4491	0,6389	0,5319	0,9638	2,4129
40	1,4454	0,7686	0,4378	0,9545	2,3999
45	1,4133	0,8988	0,3577	0,9306	2,3439
50	1,3558	1,0283	0,2882	0,8925	2,2483
55	1,2759	1,1572	0,2271	0,8403	2,1161
60	1,1762	1,2866	0,1730	0,7758	1,9520

TABLE V. $h = 5$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,6244	0,0302	2,6544	0,5171	1,1415
10	0,9914	0,1018	1,7835	0,7466	1,7380
15	1,2341	0,1996	1,3217	0,8777	2,1118
20	1,4074	0,3163	1,0307	0,9564	2,3638
25	1,5181	0,4449	0,8272	1,0034	2,5215
30	1,5823	0,5818	0,6745	1,0266	2,6089
35	1,6072	0,7233	0,5538	1,0328	2,6400
40	1,5978	0,8671	0,4547	1,0181	2,6159
45	1,5581	1,0111	0,3710	0,9905	2,5486
50	1,4916	1,1543	0,2986	0,9472	2,4388
55	1,4016	1,2966	0,2352	0,8917	2,2933
60	1,2908	1,4400	0,1792	0,8227	2,1135

TABLE VI. $h = 6$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,7131	0,0349	2,9142	0,5765	1,2896
10	1,1091	0,1158	1,9000	0,8115	1,9206
15	1,3643	0,2244	1,3872	0,9417	2,8060
20	1,5440	0,3530	1,0724	1,0162	2,5602
25	1,6561	0,4937	0,8559	1,0588	2,7149
30	1,7189	0,6426	0,6953	1,0770	2,7959
35	1,7402	0,7963	0,5695	1,0832	2,8234
40	1,7255	0,9519	0,4668	1,0694	2,7949
45	1,6791	1,1075	0,3804	1,0338	2,7129
50	1,6048	1,2619	0,3060	0,9851	2,5899
55	1,5060	1,4155	1,2409	0,9272	2,4332
60	1,3858	1,5705	0,1836	0,8620	2,2478

TABLE VII. $h = 7$.

Angles de project[n].	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend[te].	Amplitude totale.
5°	0,7946	0,0393	3,1333	0,6287	1,4233
10	1,2141	0,1285	1,9929	0,8666	2,0807
15	1,4790	0,2468	1,4381	0,9951	2,4741
20	1,6633	0,3841	1,1044	1,0670	2,7303
25	1,7760	0,5390	0,8777	1,1111	2,8871
30	1,8371	0,6965	0,7110	1,1267	2,9638
35	1,8549	0,8606	0,5812	1,1257	2,9806
40	1,8353	1,0263	0,4758	1,1054	2,9407
45	1,7829	1,1918	0,3874	1,0690	2,8520
50	1,7017	1,3560	0,3115	1,0247	2,7264
55	1,5951	1,5192	0,2452	0,9629	2,5580
60	1,4667	1,6840	0,1868	0,8900	2,3567

TABLE VIII. $h = 8$.

Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,8699	0,0435	3,3205	0,6750	1,5448
10	1,3091	0,1403	2,0689	0,9140	2,2231
15	1,5815	0,2673	1,4788	1,0407	2,6222
20	1,7692	0,4154	1,1296	1,1108	2,8801
25	1,8820	0,5760	0,8948	1,1507	3,0327
30	1,9413	0,7449	0,7232	1,1654	3,1067
35	1,9558	0,9180	0,5903	1,1605	3,1162
40	1,9317	1,0928	0,4828	1,1406	3,0723
45	1,8738	1,2669	0,3928	1,1007	2,9745
50	1,7863	1,4395	0,3157	1,0545	2,8408
55	1,6729	1,6111	0,2485	0,9839	2,6568
60	1,5371	1,7844	0,1894	0,9085	2,4456

TABLE IX. $h = 9$.

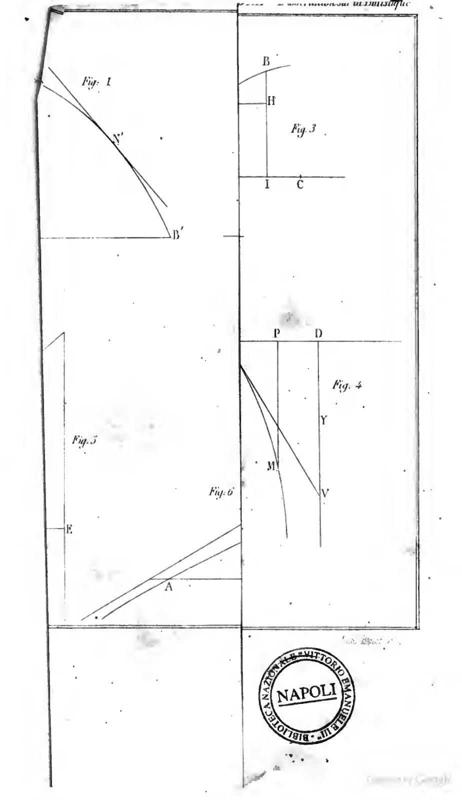
Angles de project^{s}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,9399	0,0475	3,4824	0,7164	1,6563
10	1,3957	0,1512	2,1320	0,9556	2,513
15	1,6741	0,2861	1,5121	1,0802	2,7543
20	1,8645	0,4425	1,1500	1,1483	3,0128
25	1,9770	0,6115	0,9085	1,1855	3,1625
30	2,0344	0,7887	0,7331	1,1990	3,2333
35	2,0457	0,9700	0.5976	1,1931	3,2388
40	2,0175	1,1527	0,4884	1,1700	3,1875
45	1,9547	1,3346	0,3972	1,1313	3,0860
50	1,8615	1,5147	0,3191	1,0785	2,9400
55	1,7418	1,6937	0,2511	1,0112	2,7530
60	1,5994	1,8745	0,1914	0,9297	2,5291

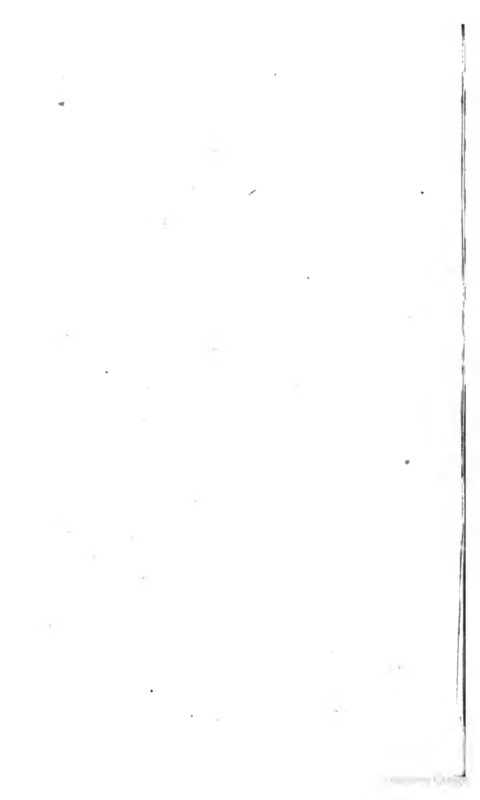
TABLE X. $h = 10$.

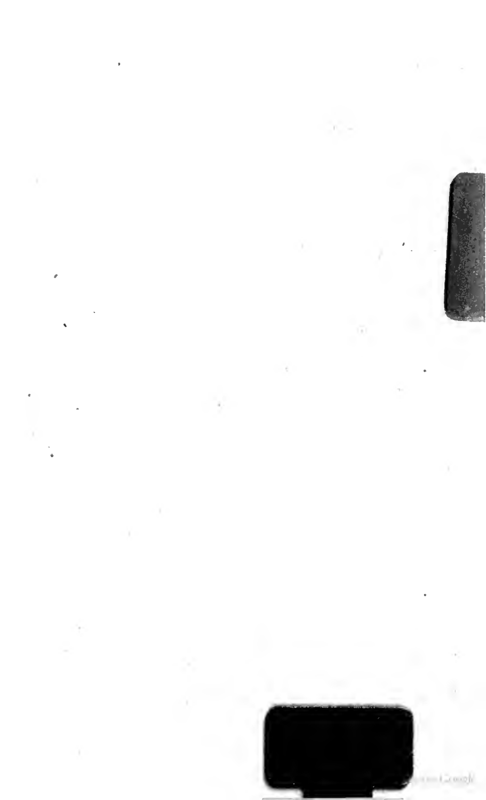
Angles de project^{n}.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	1,0053	0,0513	3,6236	0,7539	1,7592
10	1,4780	0,1616	2,1854	0,9916	2,4696
15	1,7587	0,3035	1,5398	1,1150	2,8737
20	1,9511	0,4675	1,1669	1,1806	3,1317
25	2,0631	0,6441	0,9199	1,2157	3,2788
30	2,1185	0,8288	0,7411	1,2279	3,3465
35	2,1269	1,0176	0,6036	1,2196	3,3465
40	2,0948	1,0274	0,4929	1,1953	3,2901
45	2,0424	1,3975	0,4007	1,1531	3,1956
50	1,9290	1,5831	0,3219	1,0992	3,0282
55	1,8037	1,7686	0,2533	1,0305	2,8342
60	1,6552	1,9562	0,1930	0,9465	2,6015

TABLE DES MATIÈRES.

(Les renvois indiquent les Nos des paragraphes.)


Fig. 1
N'
B'
B
H
Fig. 3
I
C
P
D
Fig. 4
Y
M
V
Fig. 5
Fig. 6
E
A






BIBLIOTECA